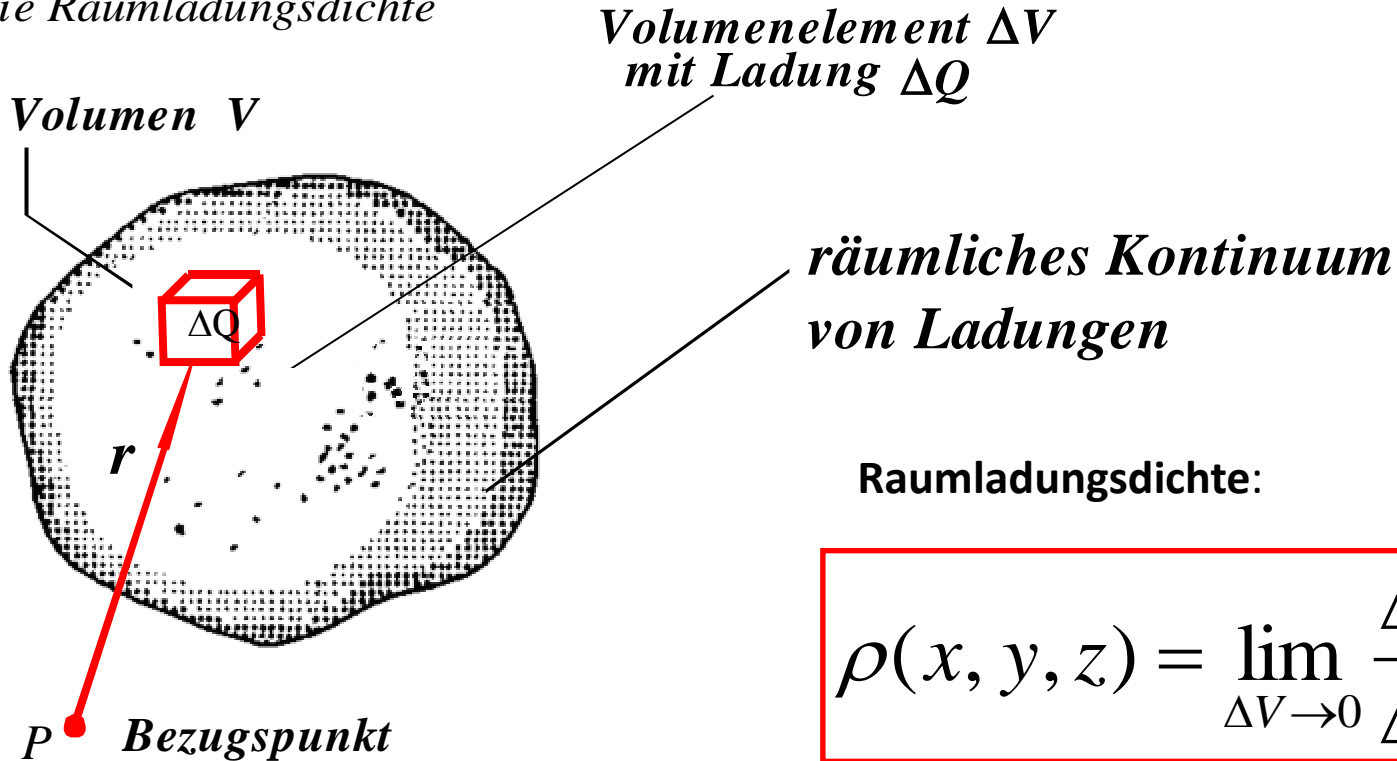


## 4. Elektrische Vorgänge in räumlichen Leitern und in Nichtleitern

### 4.1 Einige weitere Grundbegriffe

#### 4.1.1 Allgemeine Beschreibung der Ladungsverteilung im Raum

- die Raumladungsdichte

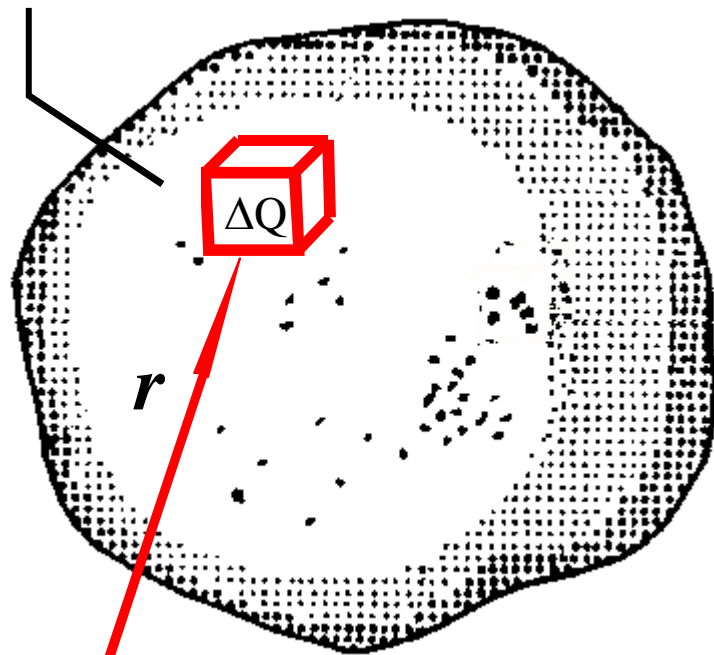


$$\rho(x, y, z) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta V} = \frac{dQ}{dV}$$

$$[\rho] = 1 \frac{\text{As}}{\text{m}^3}$$

$$\rho(x, y, z) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta V} = \frac{dQ}{dV}, \quad [\rho] = 1 \frac{As}{m^3}.$$

*Volumen V*

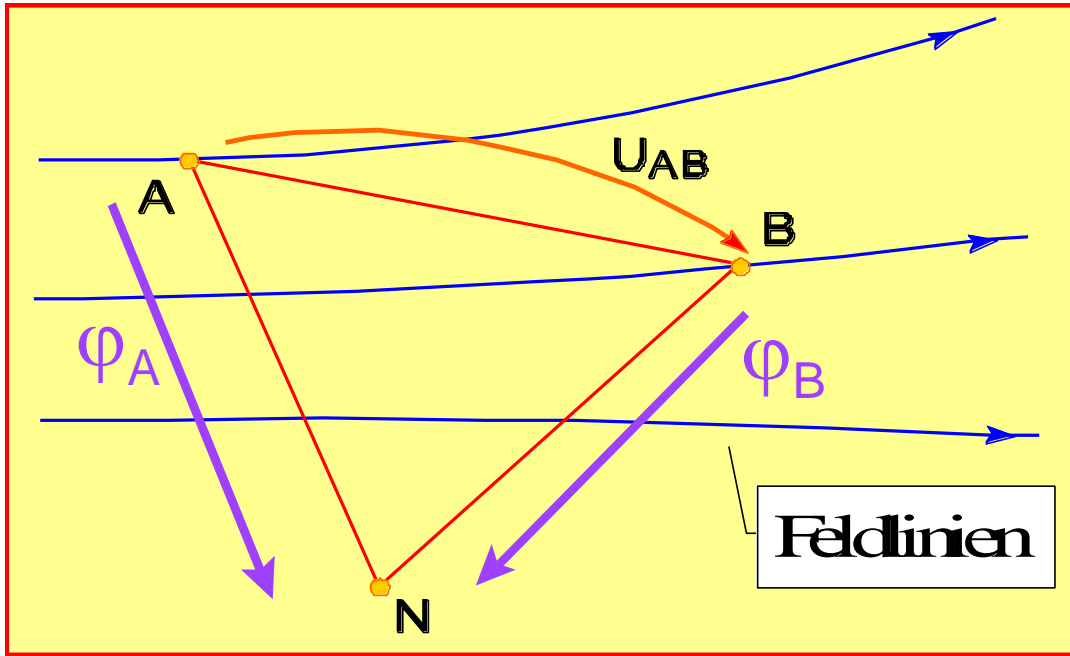


umgekehrt ergibt sich für die Ladung bei bekannter Raumladungsdichte

$$Q = \int_V \rho dV$$

$P$  *Bezugspunkt*

## 4.1.2 Potenzial, Spannung und Feldstärke



die elektrische Spannung:

$$\frac{\Delta W_{el}}{Q} = \int_a^b \vec{E} d\vec{l} = U_{ab}$$

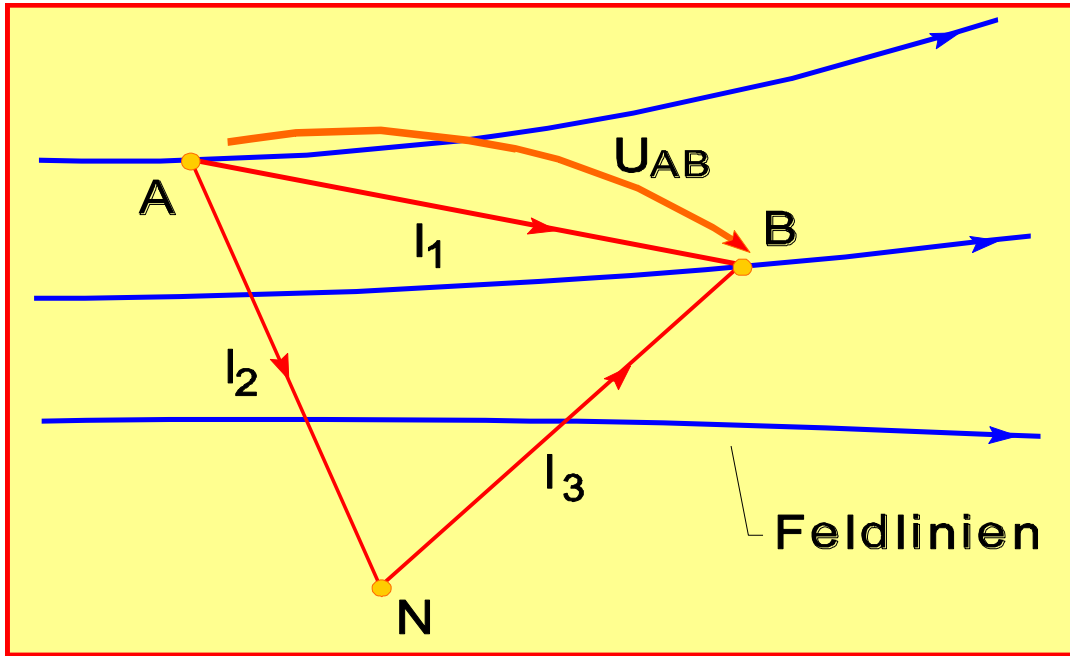
das elektrische Potenzial:

$$\frac{\Delta W_{el X \rightarrow N}}{Q} = \int_X^N \vec{E} d\vec{l} = \varphi(X)$$

$$\varphi(A) = U_{AN} = \int_A^N \vec{E} d\vec{l} \quad \varphi(B) = U_{BN} = \int_B^N \vec{E} d\vec{l}$$

$$\frac{\Delta W_{el X \rightarrow N}}{Q} = - \int_N^X \vec{E} d\vec{l} = \varphi(X) = - \frac{\Delta W_{el N \rightarrow X}}{Q}$$

# Die Bestimmung der Spannung aus dem Potential



$$\varphi(x) = U_{xN} = \int_x^N \vec{E} d\vec{l}$$

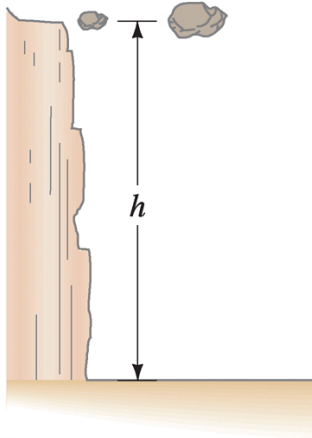
$$\varphi(A) = \int_A^N \vec{E} d\vec{l} \quad \varphi(B) = \int_B^N \vec{E} d\vec{l}$$

$$U_{AB} = \int_A^B \vec{E} d\vec{l} = \int_A^N \vec{E} d\vec{l} - \int_B^N \vec{E} d\vec{l}$$

$$U_{AB} = \int_A^N \vec{E} d\vec{l} - \int_B^N \vec{E} d\vec{l}$$

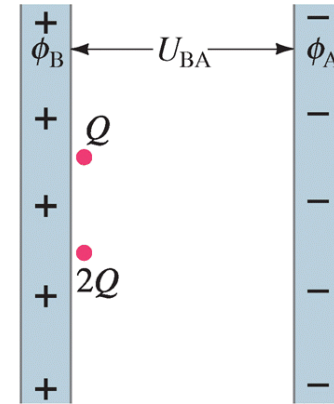
$$U_{AB} = \varphi(A) - \varphi(B)$$

# Die Analogie zwischen Potenzial und potenzieller Energie



Zwei Steine befinden sich auf gleicher Höhe.  
Der größere Stein hat eine größere potenzielle  
Energie, denn ...

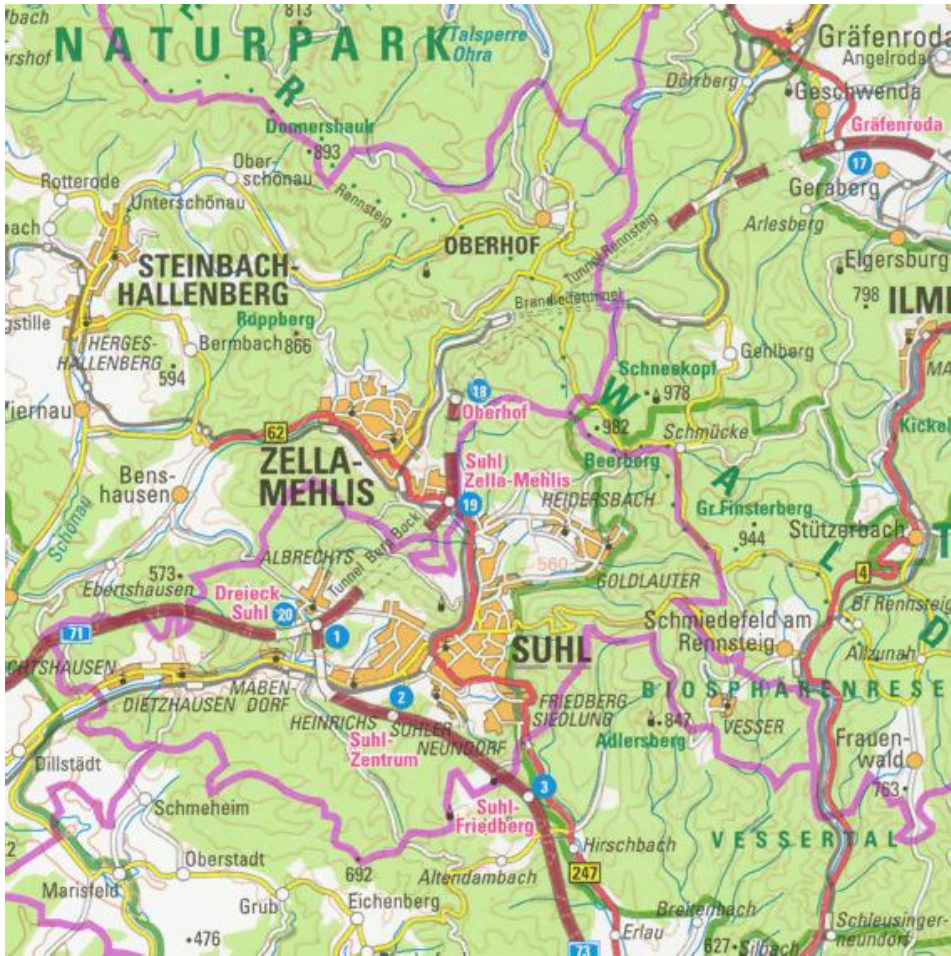
$$W_{pot\ mech} = m g h$$



Zwei Ladungen haben dasselbe elektrische  
Potenzial. Die Ladung  $2Q$  hat eine größere  
elektrische Energie, denn ...

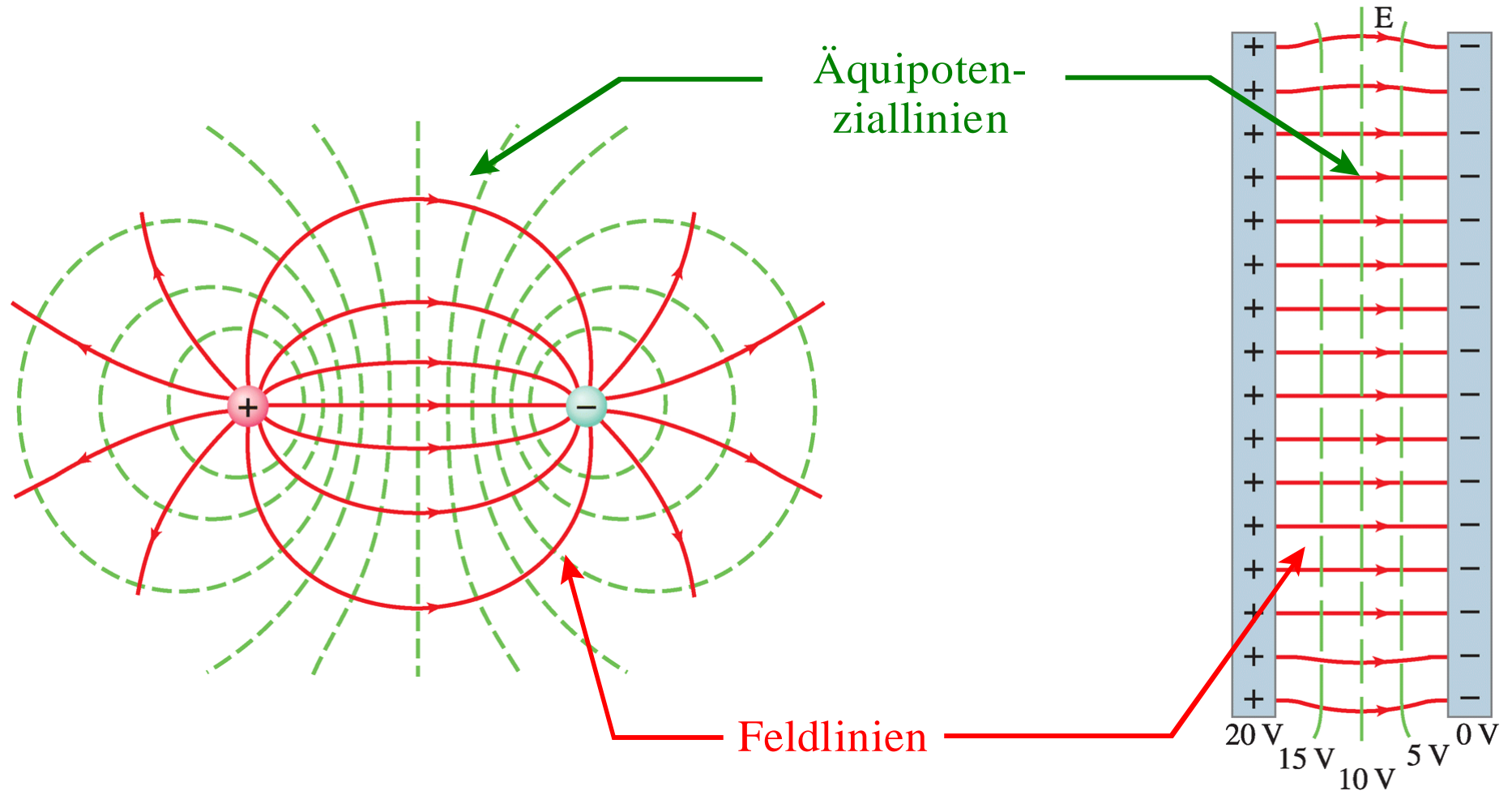
$$W_{pot\ el} = Q \varphi(h)$$

# Mechanische “Äquipotenziallinien”

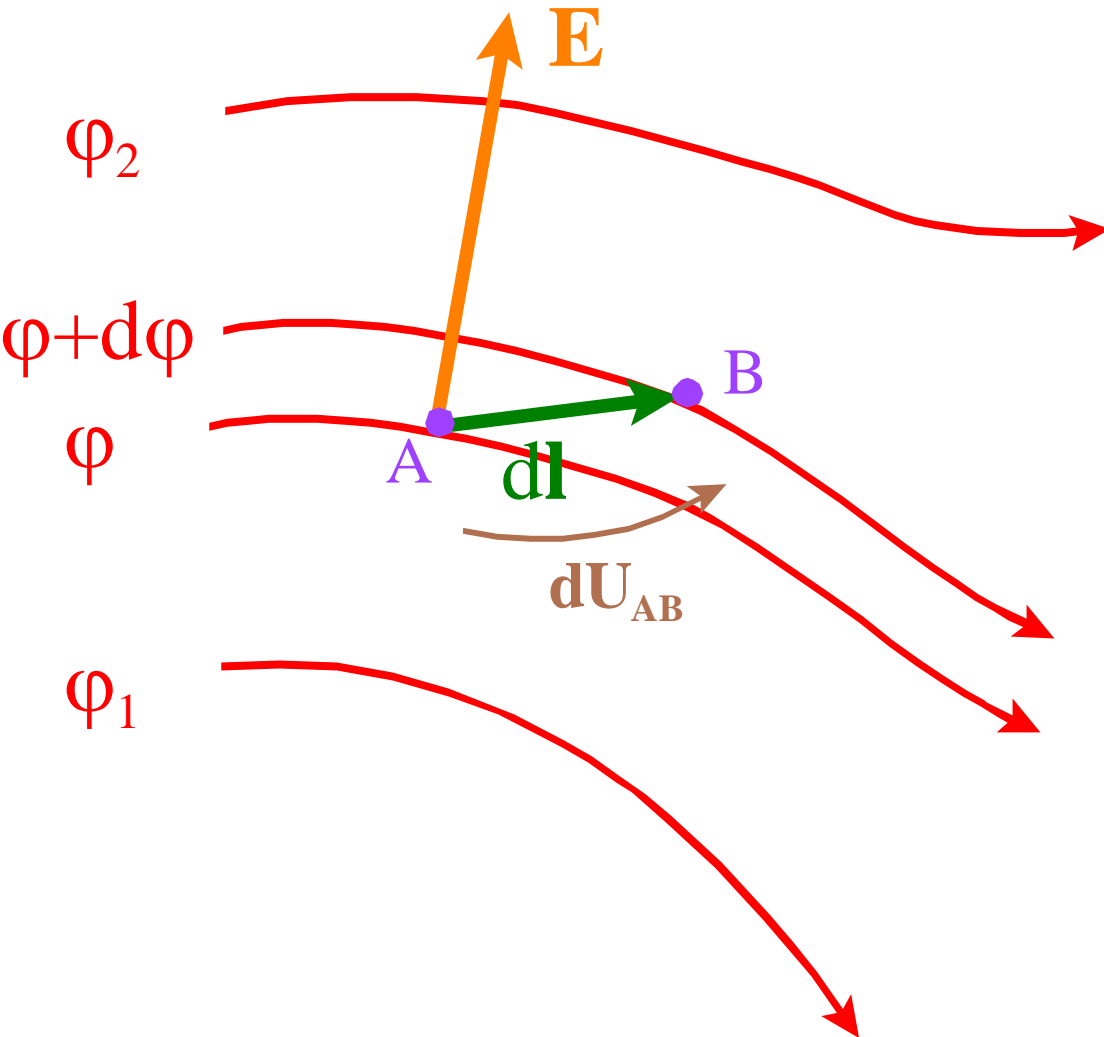


Eine topographische Karte (hier ein Ausschnitt vom Rennsteig) zeigt stetige Höhenlinien, jede von ihnen repräsentiert eine bestimmte Höhe über dem Meeresniveau. Im dargestellten Fall sind die Linien in Höhenintervallen von 25 m angegeben. Wenn Sie entlang einer dieser Linien wandern, müssen Sie weder auf- noch absteigen. Wenn Sie die Linien kreuzen, verändern Sie Ihr Gravitationspotenzial, und zwar umso schneller, je dichter die Linien liegen, maximal also, wenn Sie senkrecht zu den Linien aufsteigen.

# Äquipotenziallinien bzw. -flächen und Feldlinien als Visualisierung elektrischer Felder



# die Bestimmung der Feldstärke aus dem Potenzial



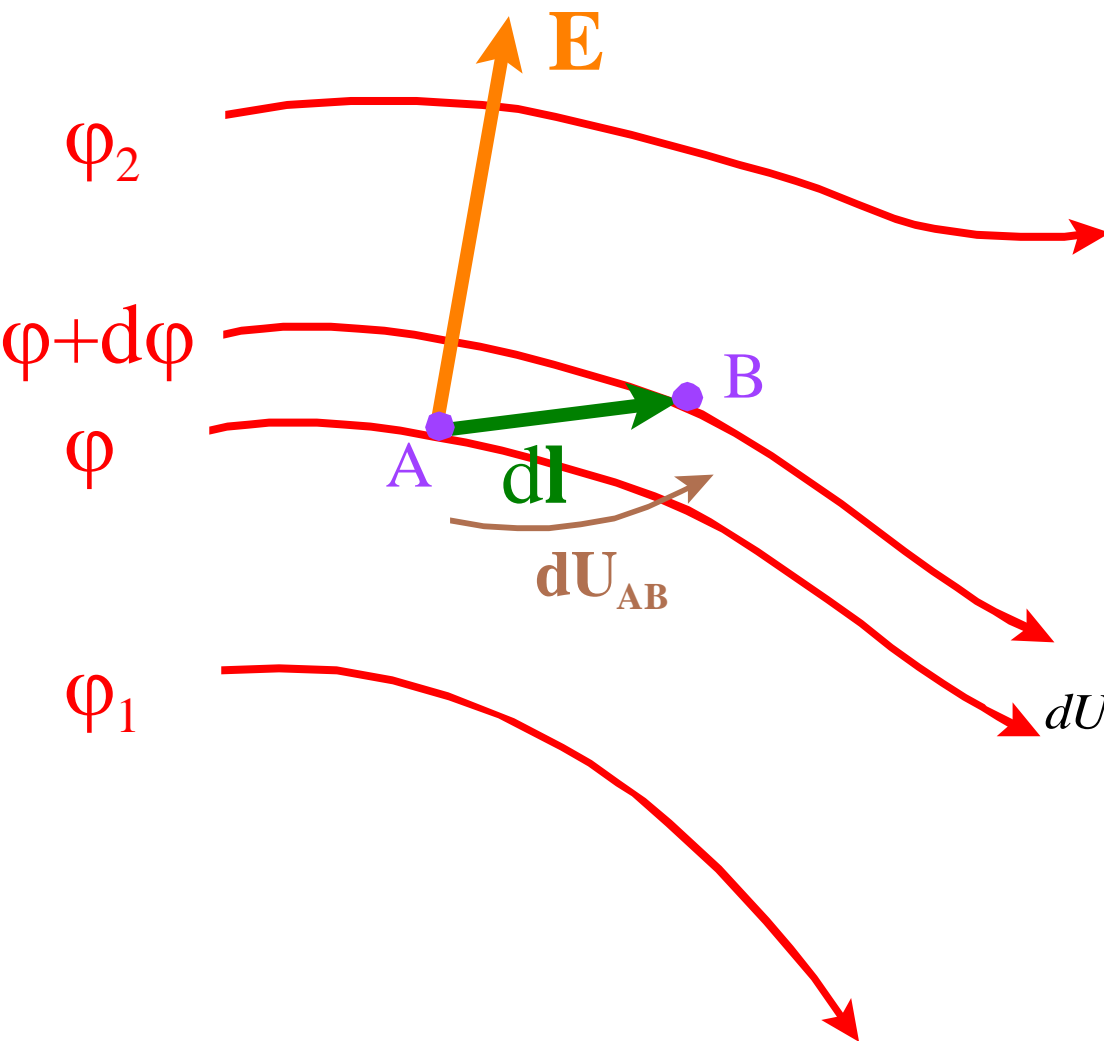
$$dU_{AB} = \vec{E} d\vec{l}$$

$$dU_{AB} = \varphi - (\varphi + d\varphi) = -d\varphi$$

$$\varphi = \varphi(x, y, z)$$

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz$$



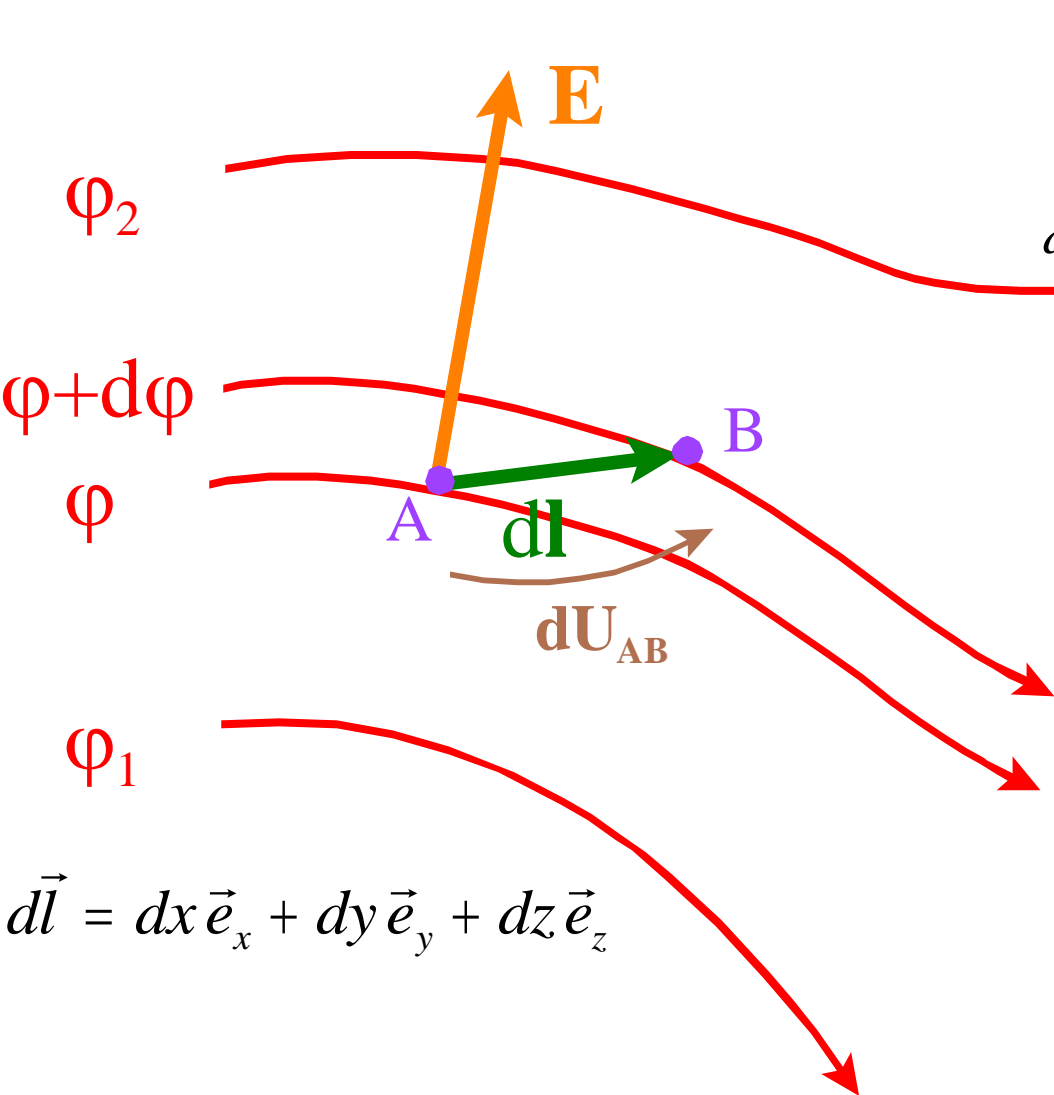


$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x} dx + \frac{\partial\phi}{\partial y} dy + \frac{\partial\phi}{\partial z} dz$$

$$d\vec{l} = dx \vec{e}_x + dy \vec{e}_y + dz \vec{e}_z$$

$$\vec{E} = E_x \vec{e}_x + E_y \vec{e}_y + E_z \vec{e}_z$$

$$dU_{AB} = \vec{E} d\vec{l} = E_x dx + E_y dy + E_z dz = -d\phi$$



$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z} dz$$

$$dU_{AB} = \vec{E} d\vec{l} = E_x dx + E_y dy + E_z dz = -d\varphi$$

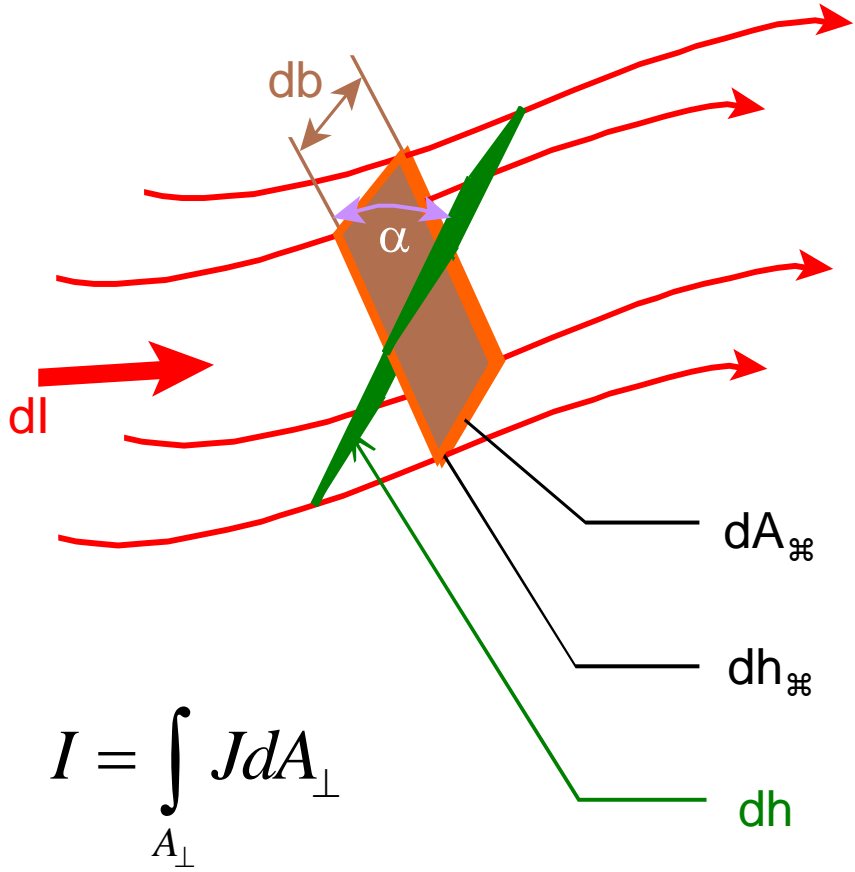
$$-d\varphi = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z} dz\right)$$

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{e}_z\right)$$

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi$$

# 4.2 Das stationäre Strömungsfeld im räumlichen Leiter

## 4.2.1 Der verallgemeinerte Zusammenhang von Stromstärke und Stromdichte



$$I = \int_{A_{\perp}} J dA_{\perp}$$

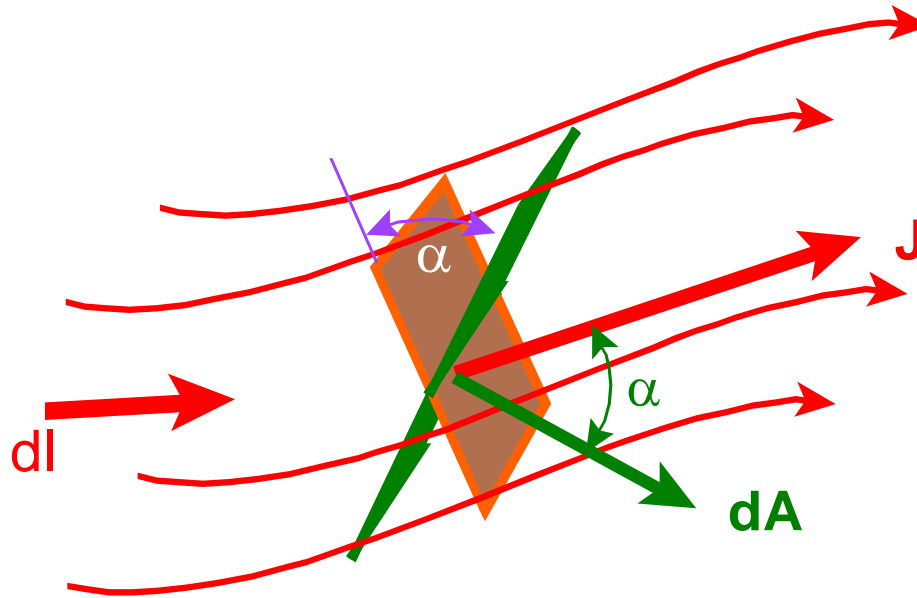
$$dI = J dA_{\perp}$$

$$dA_{\perp} = db dh_{\perp}$$

$$dA = db dh$$

$$dh_{\perp} = dh \cos \alpha$$

$$dA_{\perp} = dA \cos \alpha$$



Strömungslinien

$$dI = J dA_{\perp}$$

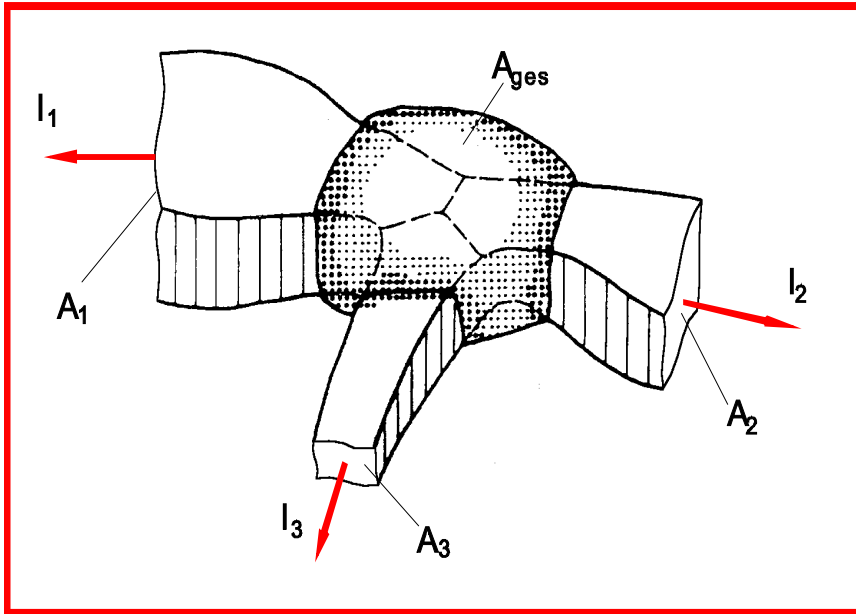
$$dA_{\perp} = dA \cos \alpha$$

$$dI = J dA \cos \alpha$$

$$I = \int_A \vec{J} d\vec{A}$$

$$dI = \vec{J} d\vec{A}$$

## Der Gaußsche Satz des stationären Strömungsfeldes



$$\sum_i I_{i \text{ vorzeichen}} = 0$$

andererseits gilt auch für den Stromver-  
zweigungspunkt (Knoten)

in den Leitern 
$$I_k = \int_{A_k} \vec{J} d\vec{A}$$

Damit entsteht für die gesamte Hüllfläche  $A_{\text{ges}}$

$$\oint \vec{J} d\vec{A} = 0$$

und

$$\int_{A_{\text{Rest}}} \vec{J} d\vec{A} = 0$$

Gaußscher Satz des stationären Strömungsfeldes

## 4.2.2 Berechnung einfacher Strömungsfelder

### - Rechenweg

$$I = \int_A \vec{J} \, d\vec{A}$$

Ausgangsgleichung

Bei positiver Beantwortung der Fragen

$$\vec{J} \parallel d\vec{A}$$

- d. h. die Äquipotentialflächen  
müssen bekannt sein

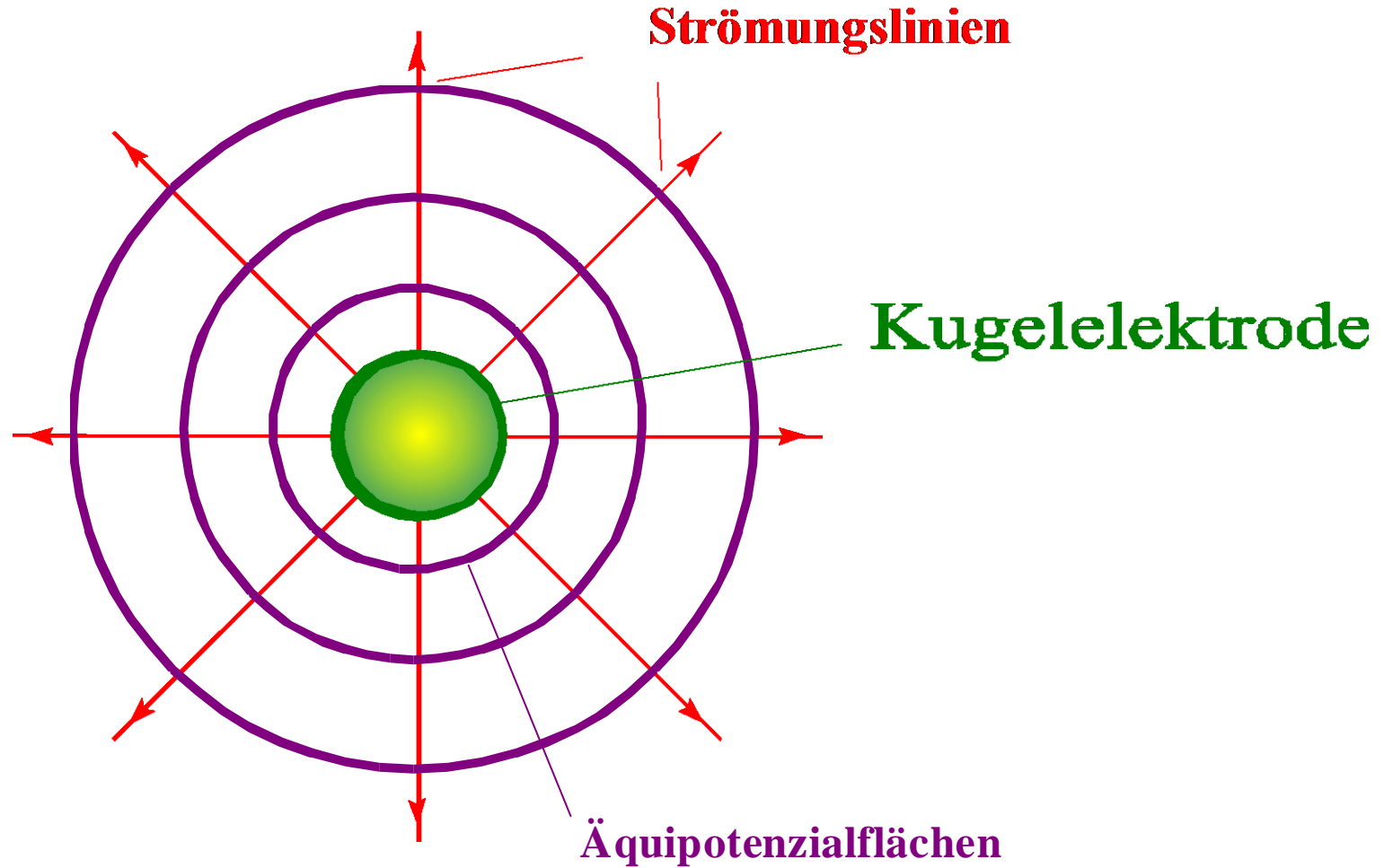
und

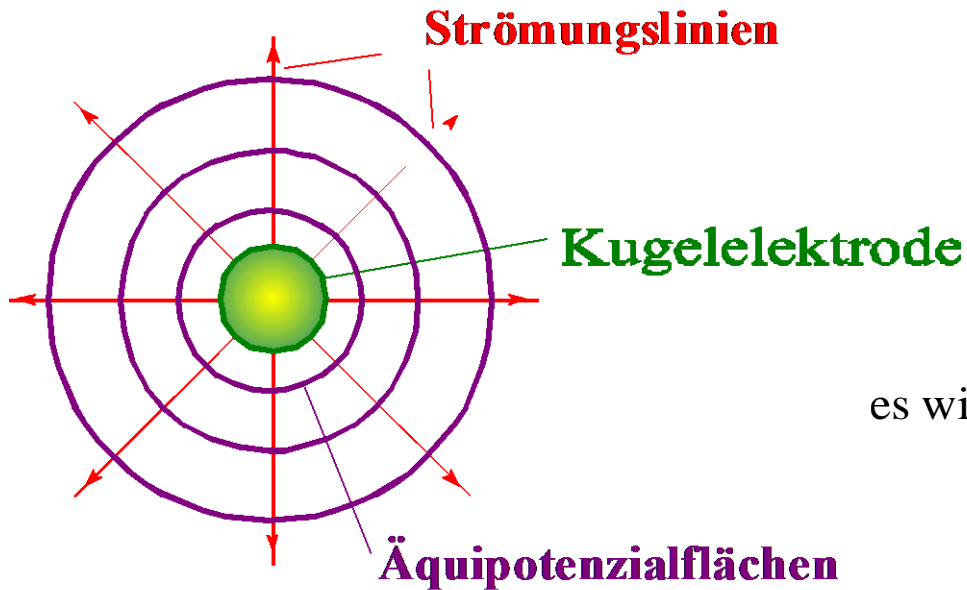
$J$  konstant auf  $A$

$$I = J A$$

Ziel

# 1. Beispiel: Strömungsfeld einer Kugelelektrode im homogenen Medium





für konzentrische Kugelflächen sind die vorgenannten Bedingungen erfüllt

$$\vec{J} \parallel d\vec{A} \quad \text{und} \quad J \text{ konstant auf } A$$

es wird also

$$I = J A_{\text{Kugel}} \quad I = J 4\pi r^2$$

$$\varphi(r) = \int \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_r^{\infty} \frac{I}{4\pi\gamma r^2} \vec{e}_r \cdot dr \vec{e}_r$$

$$\varphi(r) = \int_r^{\infty} \frac{I}{4\pi\gamma r^2} dr = \frac{I}{4\pi\gamma} \int_r^{\infty} \frac{dr}{r^2}$$

$$\varphi(r) = - \left. \frac{I}{4\pi\gamma r} \right|_r^{\infty} = \frac{I}{4\pi\gamma r}$$

$$\vec{J} = \frac{I}{4\pi r^2} \vec{e}_r$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{J}}{\gamma} = \frac{I}{4\pi\gamma r^2} \vec{e}_r$$