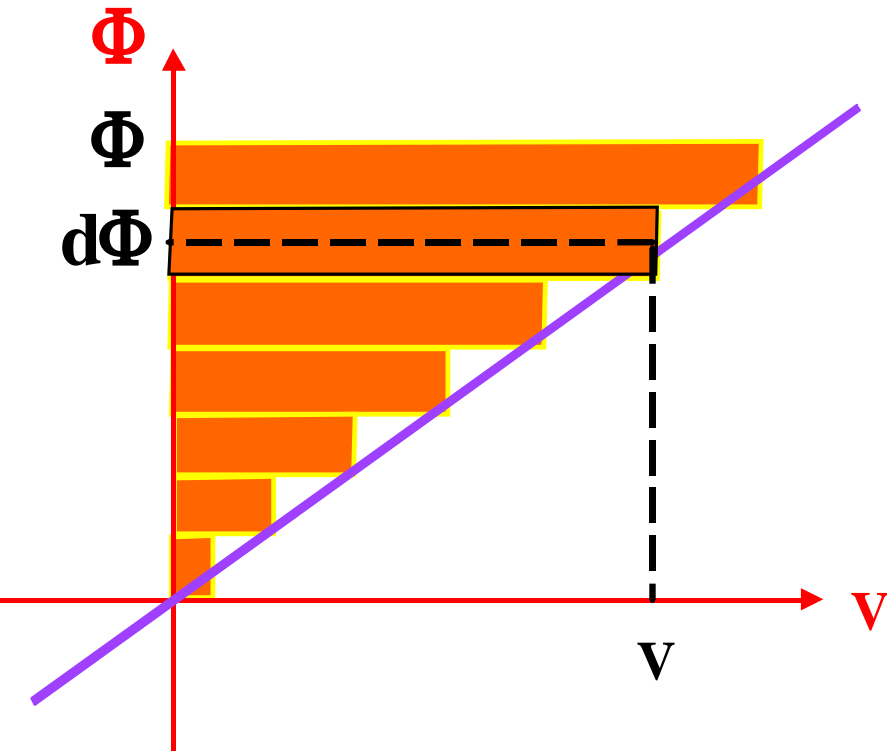


4.2.5 Energie und Energiedichte im Magnetfeld

- die magnetische Energie

$$W_m = \int_0^{\infty} u i dt = \int_0^{\infty} \frac{d\psi}{dt} i dt = \int_0^{\Psi} i(\psi) d\psi$$

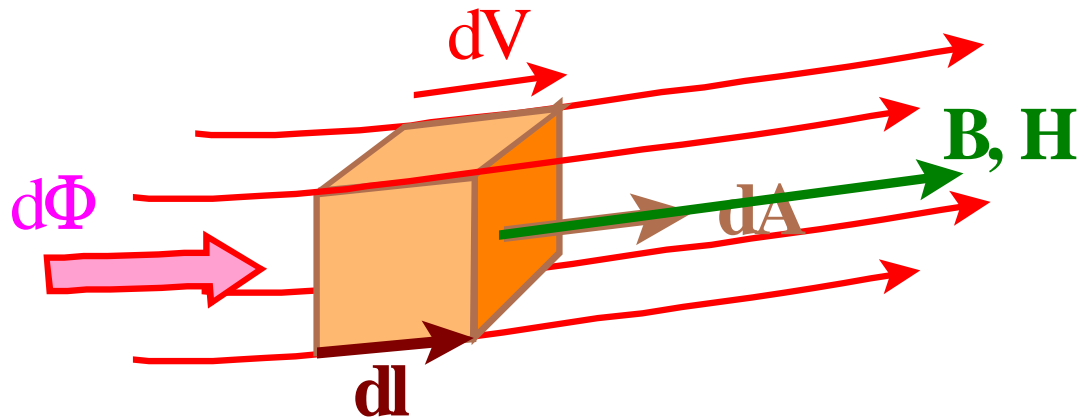


$$dW_{mag} = V d\Phi$$

$$W_{mag} = \int_0^{\Phi} V(\Phi) d\Phi$$

Tutorium jeweils Mittwoch 13:00 Uhr Hu 201

- die Energiedichte im magnetischen Feld



$$d\Phi = \vec{B} d\vec{A}$$

$$dV = \vec{H} d\vec{l}$$

$$dW_{mag} = V(\Phi) d\Phi$$

$$W_{mag} = \int_0^{\Phi} V(\Phi) d\Phi$$

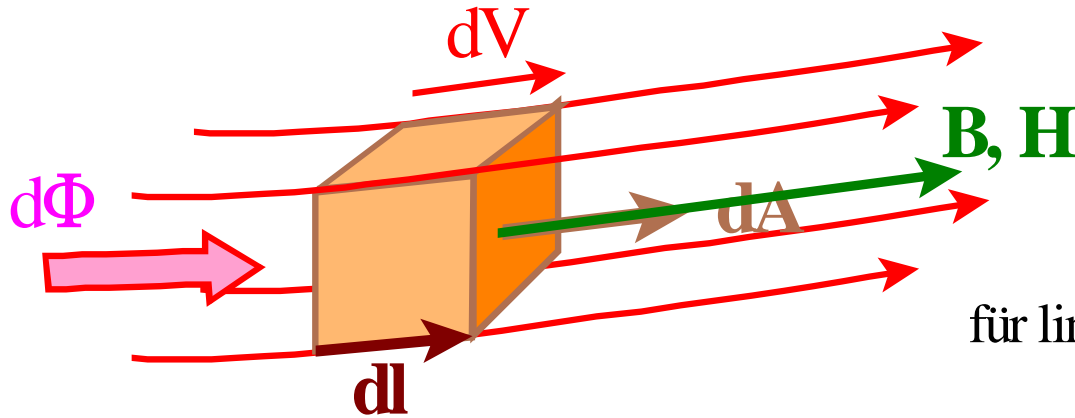
$$dW_{mag} = \int_0^B \vec{H}(B) d\vec{l} d\vec{B} d\vec{A}$$

$$dW_{mag} = \int_0^B \vec{H}(B) d\vec{B} dV^*$$

(V*: Volumen)

$$w_{mag} = \frac{dW_{mag}}{dV^*} = \int_0^B \vec{H}(B) d\vec{B}$$

(w_{mag} : Energiedichte)



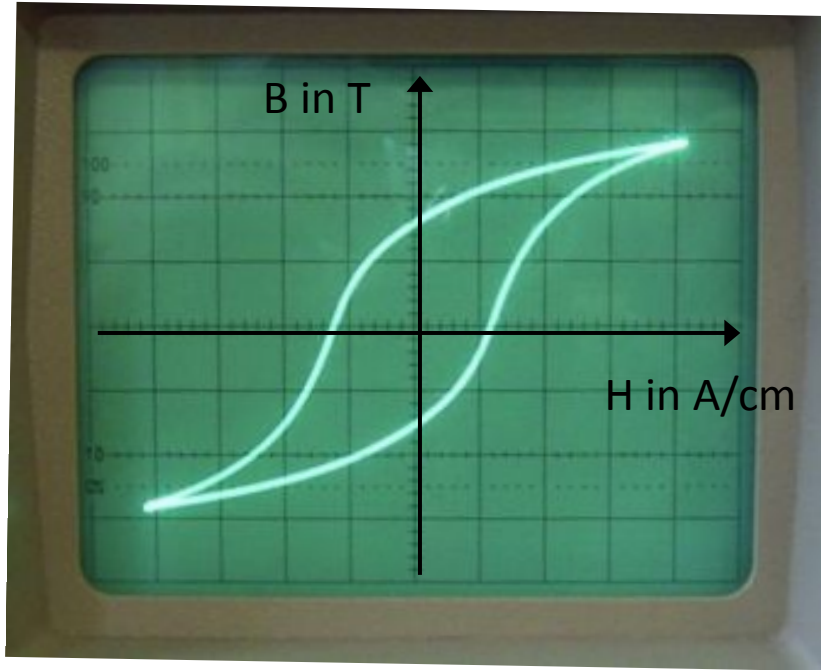
für lineare Werkstoffe gilt:

$$w_{mag} = \int_0^B \vec{H}(B) d\vec{B} = \int_0^B \frac{B}{\mu} dB$$

$$dW_{mag} = \int_0^B \vec{H}(B) d\vec{B} dV^*$$

$$w_{mag} = \frac{B^2}{2\mu} = \frac{BH}{2} = \frac{\mu H^2}{2}$$

quantitative Darstellung der B-H-Kennlinie (Versuch GET2):



Berechnung der Hystereseverluste im Eisen:

$$W_{mag} = \frac{dW_{mag}}{dV^*} = \int_0^B \vec{H}(B) d\vec{B}$$

$$W_{mag} = V^* \cdot \int_0^B \vec{H}(B) d\vec{B}$$

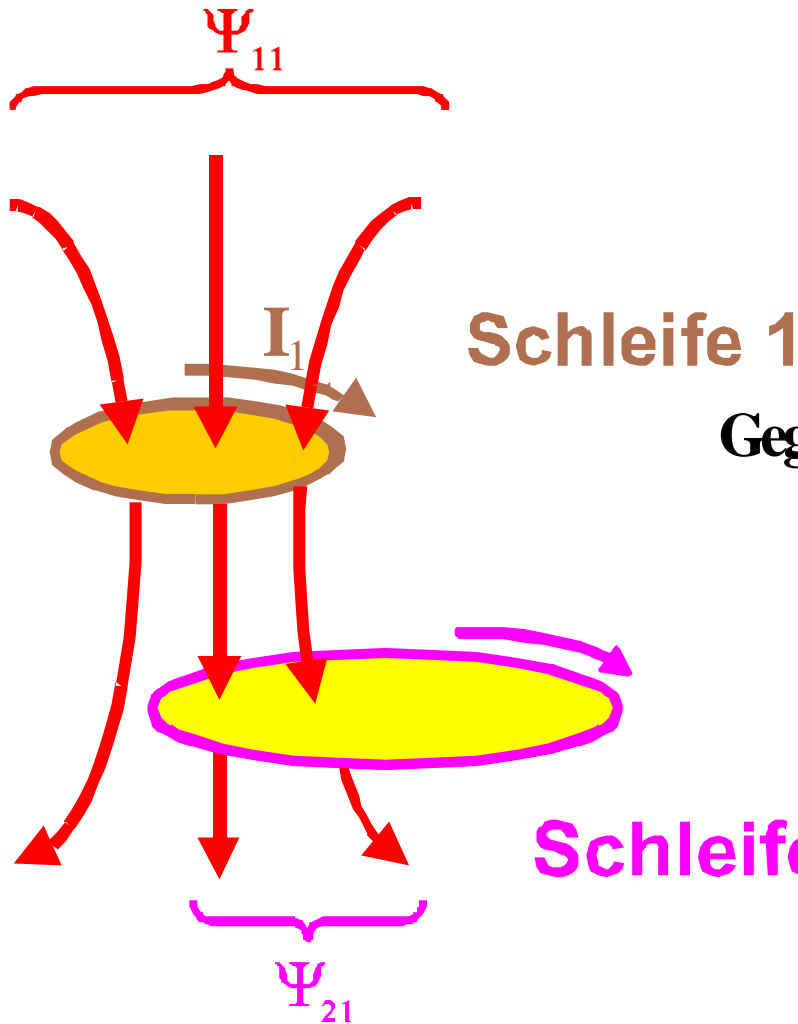
$$P_H = \frac{W_{mag}}{t} \text{ und } t \hat{=} T \text{ und } T = \frac{1}{f} \text{ und } V_{Fe}^* = A_{Fe} \cdot l_{Fe}$$

$$P_H = A_{Fe} \cdot l_{Fe} \cdot f \cdot \int H \cdot dB$$

$\int H \cdot dB \hat{=} \text{Fläche der Hystereseschleife}$

4.3 Gegeninduktion und gegenseitige Induktivität (Gegeninduktivität)

4.3.1 Grundbegriffe



$$I_1 \rightarrow H \rightarrow B \rightarrow \Phi_{11} \rightarrow \Phi_{21}$$

$$\Psi_{21} = L_{21} I_1 = M I_1$$

Gegenseitige Induktivität (Gegeninduktivität)

$$L_{21} = M = \frac{\Psi_{21}}{I_1}$$

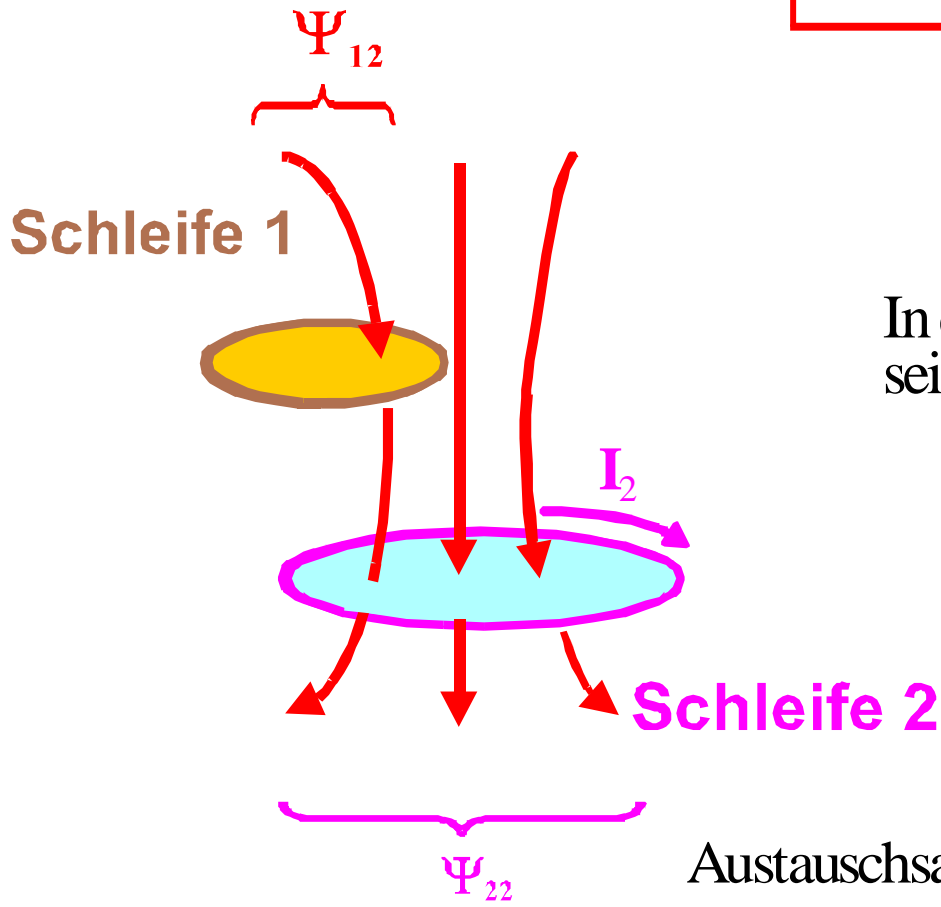
Ort der Wirkung

Ursache

$$[M] = \frac{[\Psi]}{[I]} = 1 \frac{\text{Vs}}{\text{A}} = 1\text{H}$$

Umgekehrt ergibt sich:

$$I_2 \rightarrow H \rightarrow B \rightarrow \Phi_{22} \rightarrow \Phi_{12} \rightarrow \Psi_{12}$$



$$\Psi_{12} = L_{12} I_2 = M I_2$$

In diesem Fall erhält man für die gegenseitige Induktivität (Gegeninduktivität)

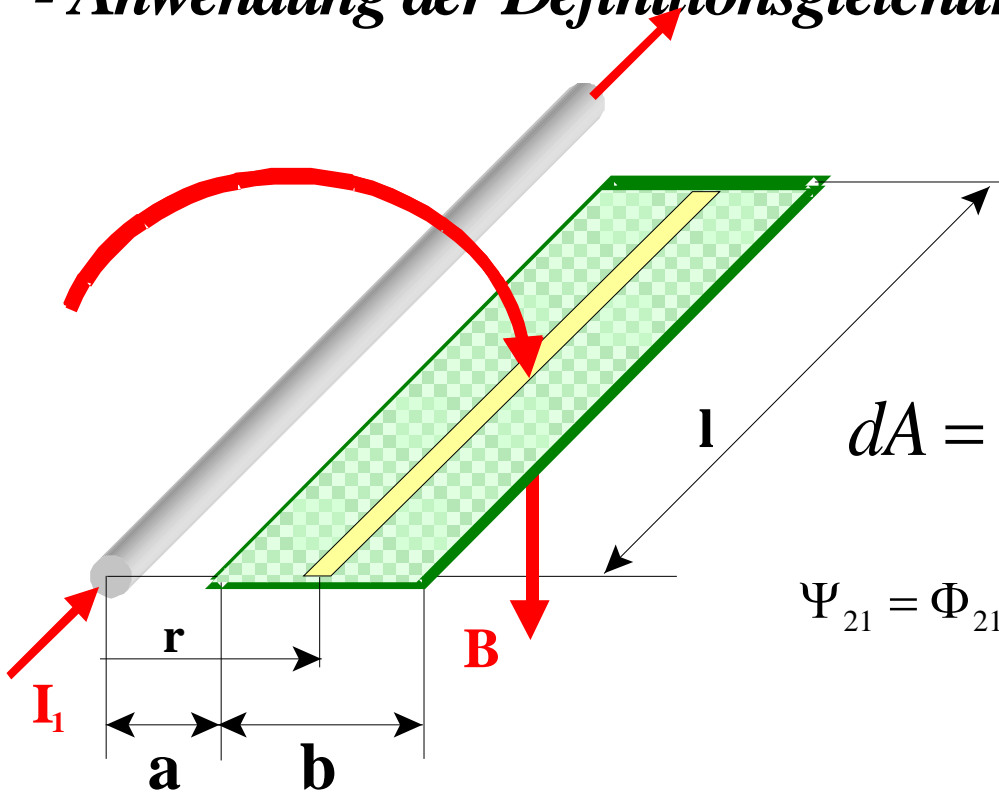
$$L_{12} = M = \frac{\Psi_{12}}{I_2}$$

Austauschsatz: $L_{12} = L_{21} = M = \frac{\Psi_{21}}{I_1} = \frac{\Psi_{12}}{I_2}$



4.3.2 Gegeninduktivitätsberechnung

- Anwendung der Definitionsgleichung



$$L_{21} = \frac{\Psi_{21}}{I_1}$$

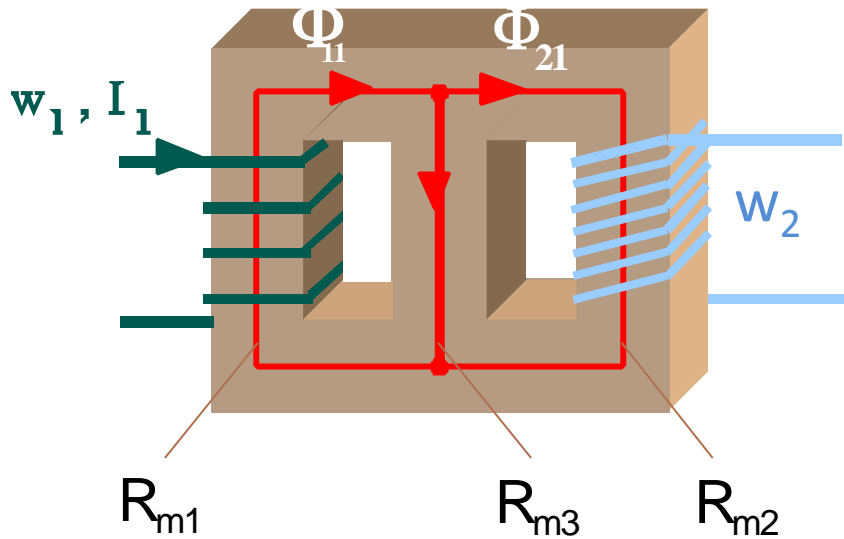
$$\Psi_{21} = \Phi_{21} = \int_A \vec{B} d\vec{A} = \int_A \mu \vec{H} d\vec{A}$$

$$dA = l \cdot dr$$

$$\Psi_{21} = \Phi_{21} = \int_a^{a+b} \frac{I_1 \mu}{2\pi r} l dr = \frac{I_1 \mu l}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a}$$

$$L_{21} = \frac{\Psi_{21}}{I_1} = \frac{\Phi_{21}}{I_1} = \frac{\mu l}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a}$$

- die Gegeninduktivitätsbemessungsgleichung



$$L_{21} = \frac{\Psi_{21}}{I_1} \quad L_{21} = \frac{w_2 \Phi_{21}}{I_1}$$

$$\text{Koppelfaktor } k_{21} = \frac{\Phi_{21}}{\Phi_{11}}$$

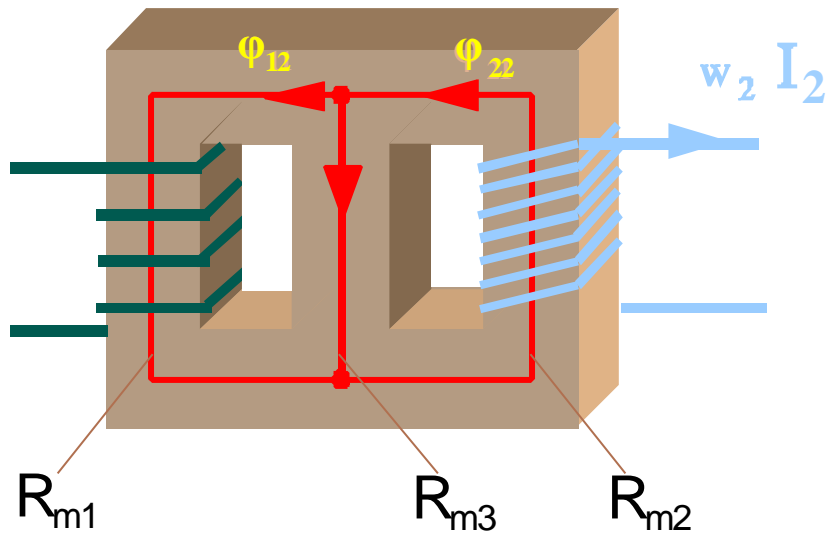
$$L_{21} = \frac{w_2 k_{21} \Phi_{11}}{I_1} = \frac{w_2 k_{21}}{I_1} \frac{\Theta_1}{R_{mers1}}$$

$$L_{21} = \frac{w_2 k_{21}}{I_1} \frac{w_1 I_1}{R_{mers1}} = k_{21} \frac{w_1 w_2}{R_{mers1}}$$

$$L_{21} = k_{21} \cdot \frac{w_1 \cdot w_2}{R_{mers1}} \cdot \frac{w_1}{w_1} = k_{21} \cdot \frac{w_2}{w_1} L_1$$

$$L_1 = \frac{w_1^2}{R_{mers1}}$$

$$L_{21} = k_{21} \frac{w_2}{w_1} L_1$$



$$L_{12} = L_{21} = \frac{\Psi_{12}}{I_2} \quad L_{12} = \frac{w_1 \cdot \Phi_{12}}{I_2}$$

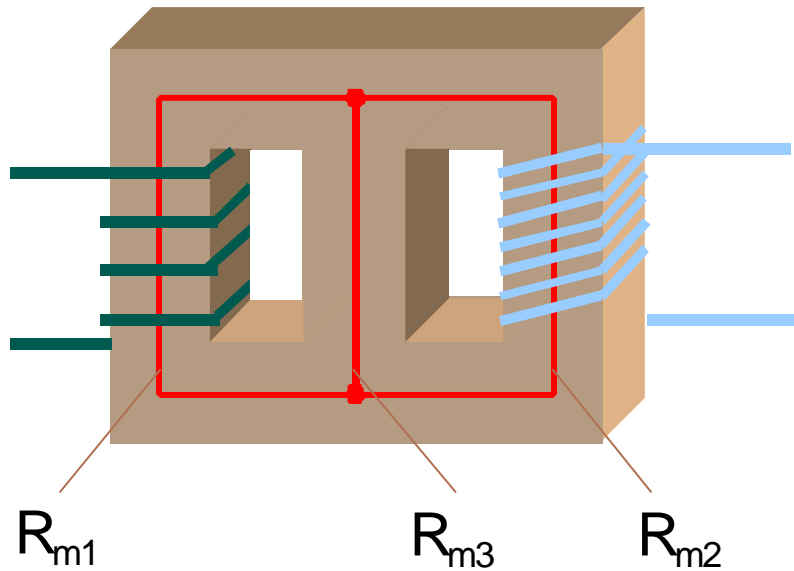
$$\text{Koppelfaktor } k_{12} = \frac{\Phi_{12}}{\Phi_{22}}$$

$$L_{12} = \frac{w_1 \cdot k_{12} \cdot \Phi_{22}}{I_2} = \frac{w_1 \cdot k_{12}}{I_2} \cdot \frac{\Theta_2}{R_{mers2}}$$

$$L_{12} = \frac{w_1 \cdot k_{12} \cdot w_2 \cdot I_2}{I_2 \cdot R_{mers2}}$$

$$L_{12} = k_{12} \cdot \frac{w_1 \cdot w_2}{R_{mers2}} = k_{12} \cdot \frac{w_1 \cdot w_2}{R_{mers2}} \cdot \frac{w_2}{w_2} = k_{12} \cdot \frac{w_1}{w_2} \cdot L_2$$

$$L_2 = \frac{w_2^2}{R_{mers2}}$$



$$L_{21} = \sqrt{k_{12} k_{21} L_1 L_2} = \sqrt{k_{12} k_{21}} \sqrt{L_1 L_2}$$

$$k = \sqrt{k_{12} k_{21}}$$

$$L_{21} = k_{21} \frac{w_2}{w_1} L_1$$

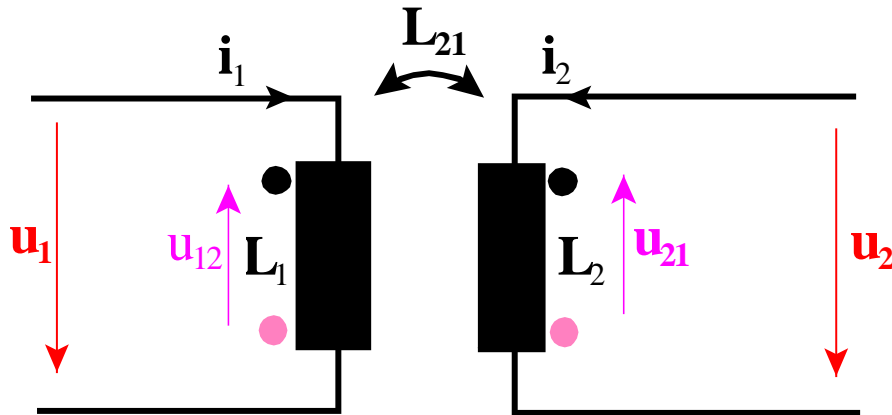
$$L_{12} = L_{21} = k_{12} \frac{w_1}{w_2} L_2$$

$$L_{21}^2 = k_{12} k_{21} L_1 L_2$$

$$L_{21} = k \sqrt{L_1 L_2}$$

- Schaltzeichen für Gegeninduktivitäten

- Strom - Spannungsgleichung



$$u = + \frac{d\Psi}{dt}$$

für L_{jk} konstant :

$$u_{jk} = L_{jk} \frac{d i_k}{dt}$$

- Gegeninduktivität in Stromkreisen

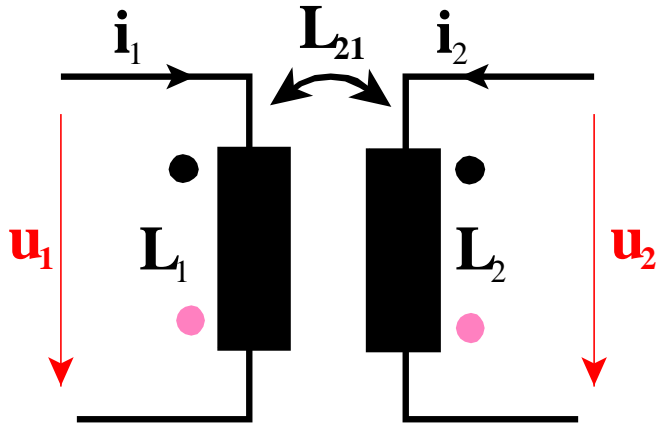
• • $u_1 = +L_1 \frac{d i_1}{dt} + L_{12} \frac{d i_2}{dt}$

$$u_2 = +L_2 \frac{d i_2}{dt} + L_{21} \frac{d i_1}{dt}$$

• • $u_1 = +L_1 \frac{d i_1}{dt} - L_{12} \frac{d i_2}{dt}$

$$u_2 = +L_2 \frac{d i_2}{dt} - L_{21} \frac{d i_1}{dt}$$

- Die in verkoppelten Magnetkreisen gespeicherte Energie



Ansatz:
$$W_m = \int_0^\infty (p_{el1} + p_{el2}) dt$$

1. Aufbau des Magnetfeldes in Spule 1 bei offenen Klemmen an Spule 2 und Erhöhen des Stromes von 0 auf I_1 :

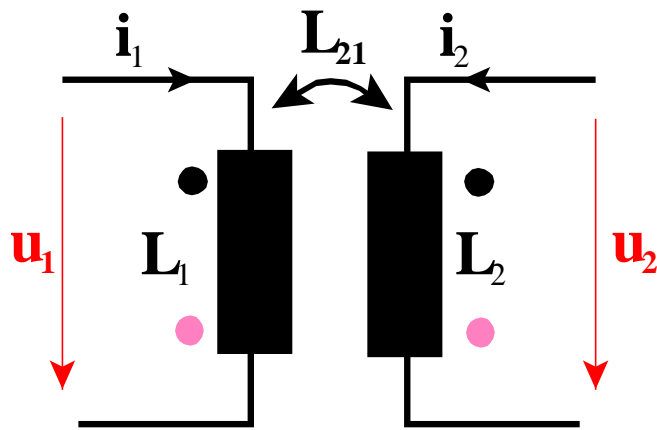
$$u_1 = +L_1 \frac{di_1}{dt} \quad i_2 = 0$$

$$u_1 = +L_1 \frac{di_1}{dt} \overset{\bullet}{\pm} \overset{\bullet}{\pm} L_{12} \frac{di_2}{dt}$$

$$u_2 = +L_2 \frac{di_2}{dt} \overset{\bullet}{\pm} \overset{\bullet}{\pm} L_{21} \frac{di_1}{dt}$$

$$W_{m11} = \int_0^\infty L_1 \frac{di_1}{dt} i_1 dt = L_1 \int_0^{I_1} i_1 di_1$$

$$W_{m11} = L_1 \frac{I_1^2}{2} \quad W_{m21} = 0$$



2. Aufbau des Magnetfeldes in Spule 2 bei weiter fließendem Strom I_1 und Erhöhen des Stromes in Spule 2 von 0 auf I_2 :

$$W_{m22} = \int_0^{\infty} L_2 \frac{d i_2}{dt} i_2 dt = L_2 \int_0^{I_2} i_2 d i_2$$

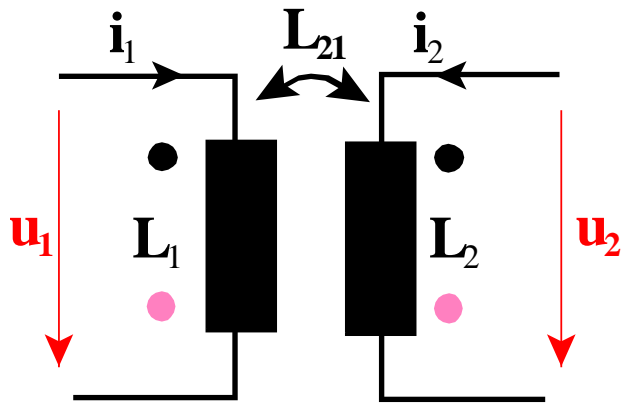
$$W_{m22} = L_2 \frac{I_2^2}{2}$$

$$u_1 = +L_1 \frac{d i_1}{dt} \overset{\bullet}{\pm} L_{12} \frac{d i_2}{dt} \underset{\bullet}{\bullet}$$

$$W_{m12} = \overset{\bullet}{\pm} \int_0^{\infty} L_{12} \frac{d i_2}{dt} I_1 dt = \overset{\bullet}{\pm} L_{12} I_1 \int_0^{I_2} d i_2 \underset{\bullet}{\bullet}$$

$$u_2 = +L_2 \frac{d i_2}{dt} \overset{\bullet}{\pm} L_{21} \frac{d i_1}{dt} \underset{\bullet}{\bullet}$$

$$W_{m12} = \overset{\bullet}{\pm} L_{12} I_1 I_2 \underset{\bullet}{\bullet}$$



$$W_{m11} = L_1 \frac{I_1^2}{2}$$

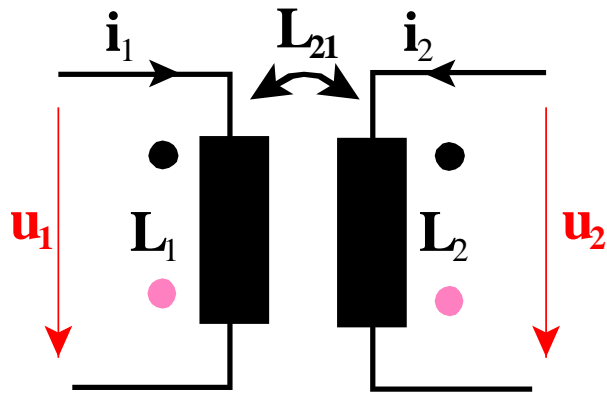
$$W_{m21} = 0$$

$$W_{m12} = \overset{\bullet}{\pm} L_{12} I_1 I_2$$

$$W_{m22} = L_2 \frac{I_2^2}{2}$$

$$W_m = W_{m11} + W_{m12} + W_{m21} + W_{m22}$$

$$W_m = L_1 \frac{I_1^2}{2} \overset{\bullet}{\pm} L_{12} I_1 I_2 + L_2 \frac{I_2^2}{2}$$



$$W_m = L_1 \frac{I_1^2}{2} \overset{\bullet}{\underset{\color{pink}\bullet}}{\pm} L_{12} I_1 I_2 + L_2 \frac{I_2^2}{2}$$

Vertauscht man die Reihenfolge des Feldaufbaus erhält man:

$$W_m = L_1 \frac{I_1^2}{2} \overset{\bullet}{\underset{\color{pink}\bullet}}{\pm} L_{21} I_1 I_2 + L_2 \frac{I_2^2}{2}$$

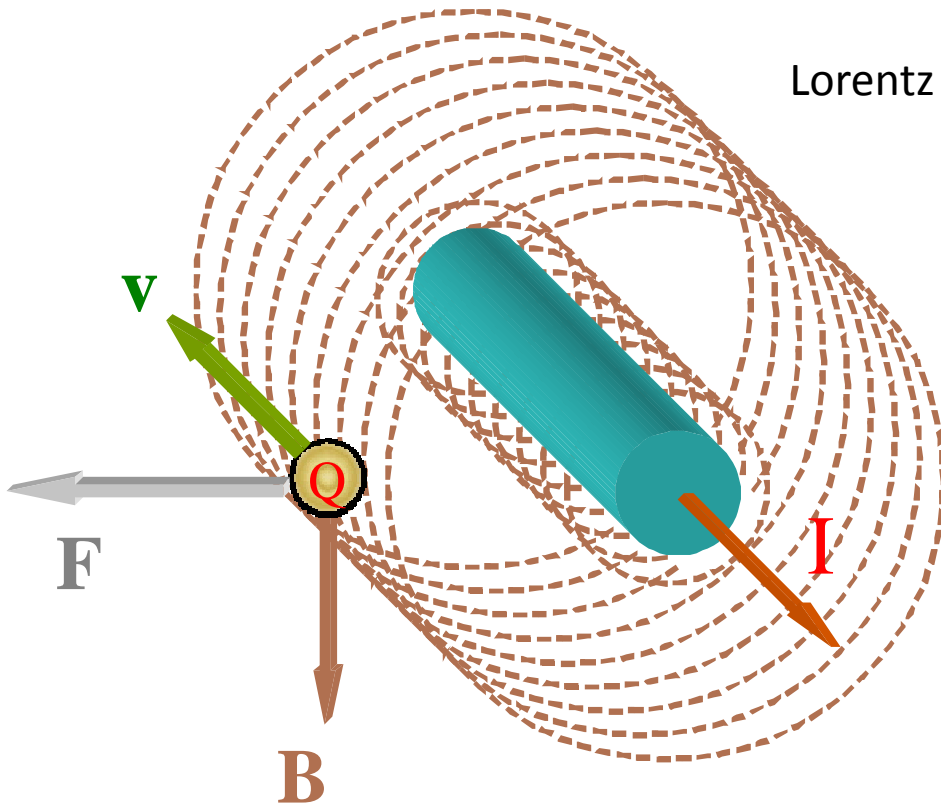
Da die Feldenergie nicht von der Reihenfolge des Anschaltens der Spulen abhängen kann, folgt zwangsläufig:

$$L_{21} = L_{12}$$

5. Kräfte und Energie im magnetischen Feld

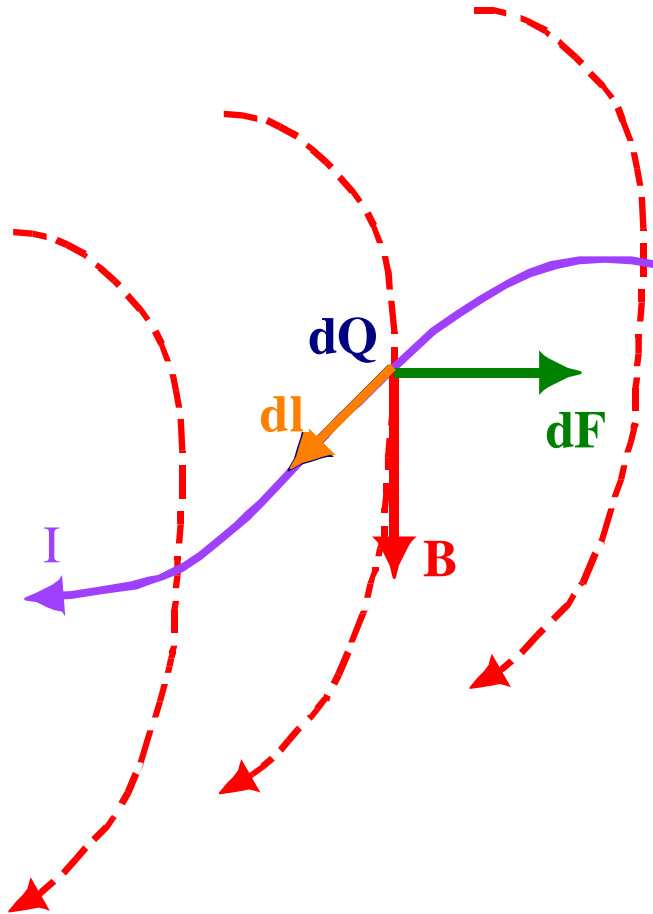
5.1 Kräfte auf Ladungen im magnetischen Feld

Lorentz – Kraft:



$$\vec{F} = Q \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$$

5.2 Kräfte auf stromdurchflossene Leiter im magnetischen Feld



$$d\vec{F} = dQ (\vec{v} \times \vec{B})$$

$$dQ = I dt$$

$$d\vec{F} = I dt (\vec{v} \times \vec{B})$$

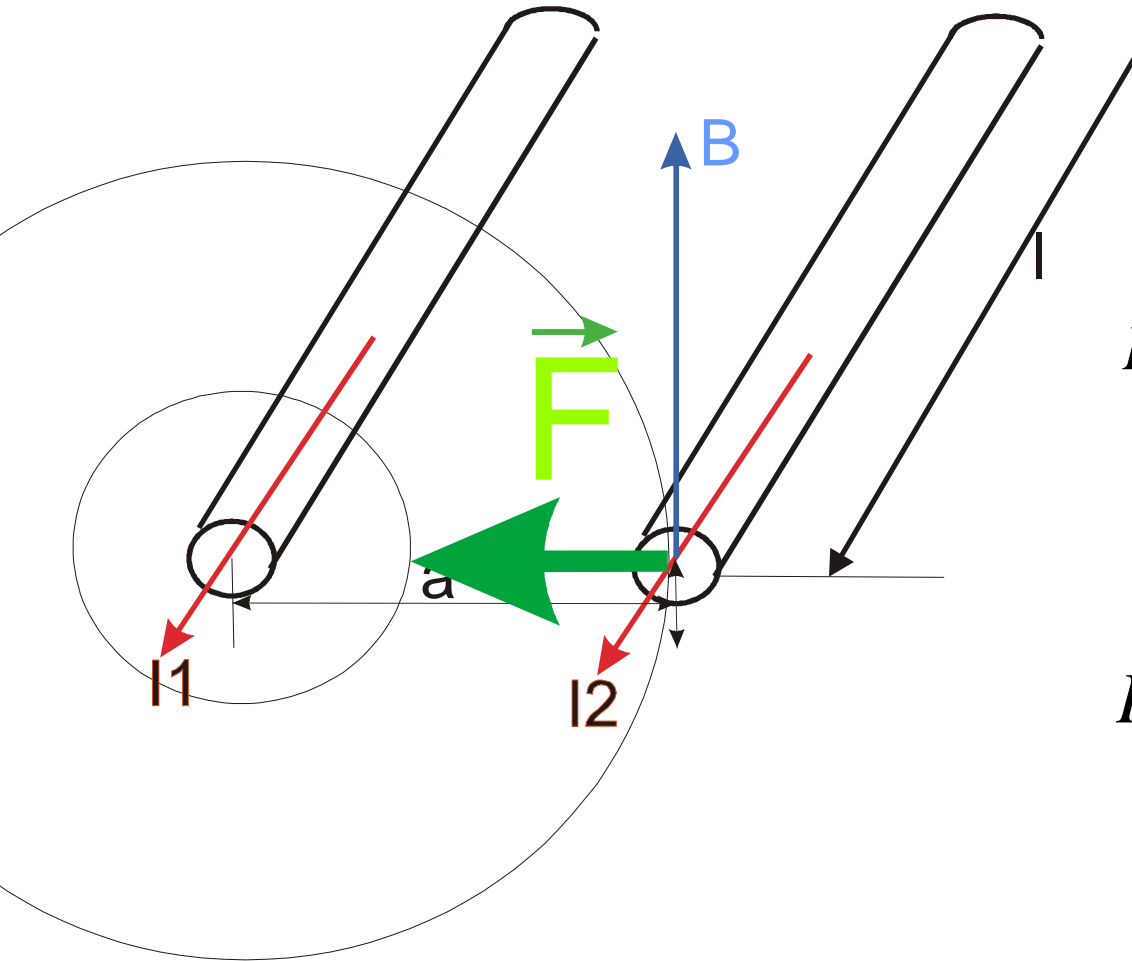
$$d\vec{F} = I (\vec{v} dt \times \vec{B})$$

$$d\vec{F} = I (d\vec{l} \times \vec{B})$$

Amper'sches Kraftgesetz

$$\vec{F} = \oint I \cdot (d\vec{l} \times \vec{B})$$

Kräfte zwischen stromdurchflossenen Leitern



$$\vec{F} = \oint I \cdot (d\vec{l} \times \vec{B})$$

$$\vec{F} = I_2 \cdot \vec{l} \times \vec{B}$$

$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum I$$

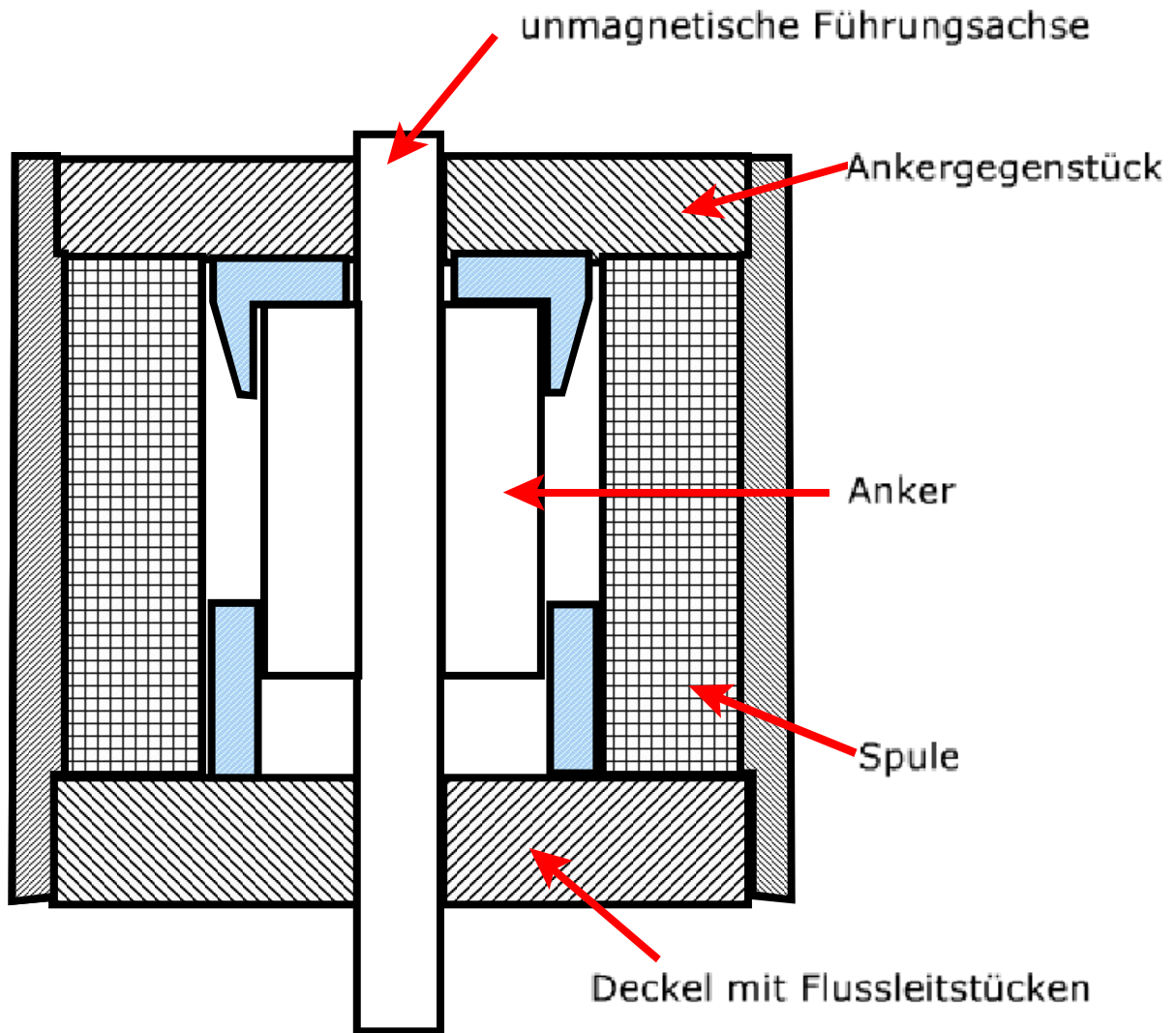
$$B = \mu_0 \cdot H \text{ und } H = \frac{I_1}{2 \cdot \pi \cdot a}$$

$$B = \mu_0 \cdot \frac{I_1}{2 \cdot \pi \cdot a}$$

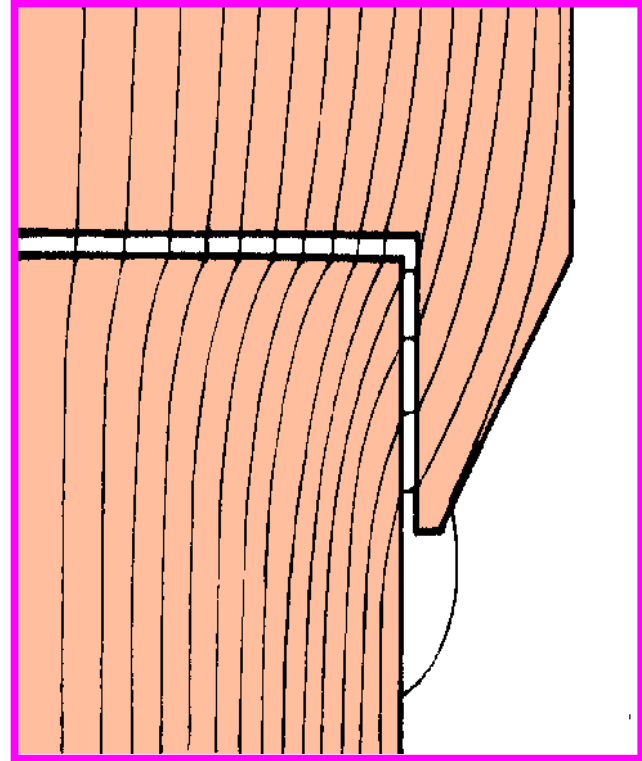
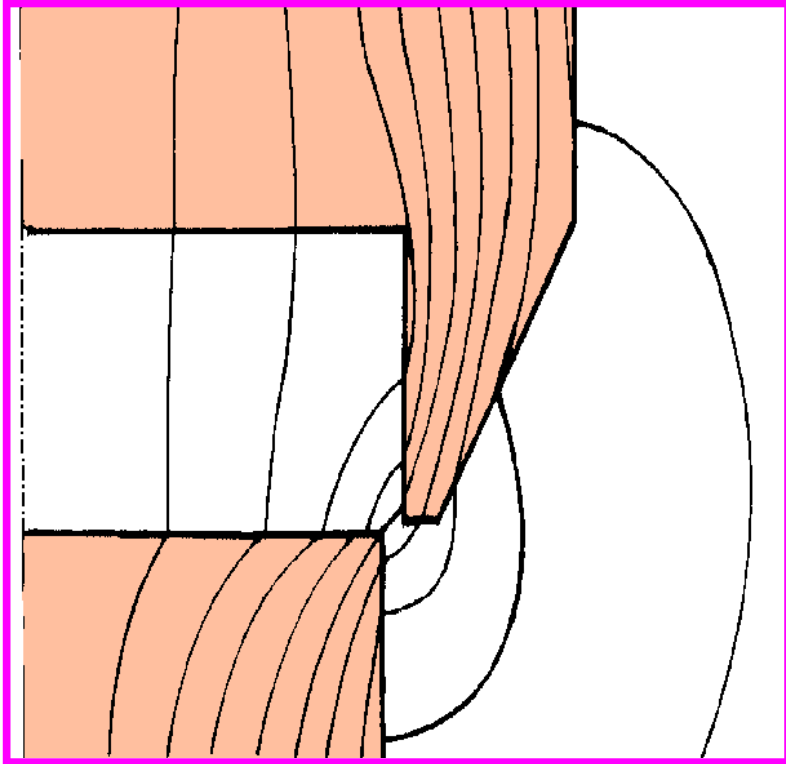
$$F = I_2 \cdot l \cdot B \cdot \sin(\angle(\vec{l}, \vec{B}))$$

$$F = \mu_0 \cdot \frac{I_1 \cdot I_2 \cdot l}{2 \cdot \pi \cdot a}$$

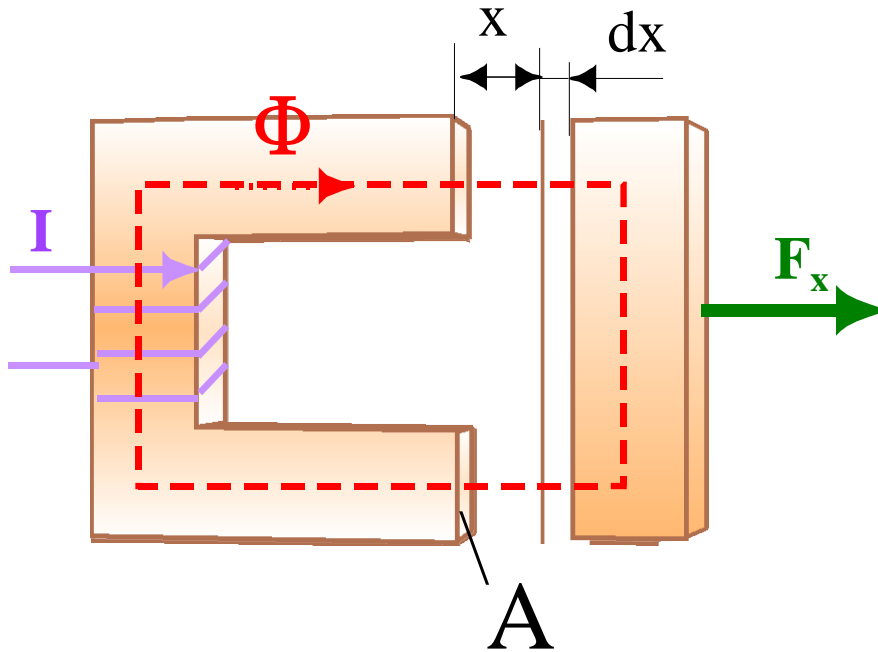
5.3 Kraft auf Pole (Trennflächen)



Nutz- und Streufluss



Berechnung von Kräften auf Trennflächen im magnetischen Feld

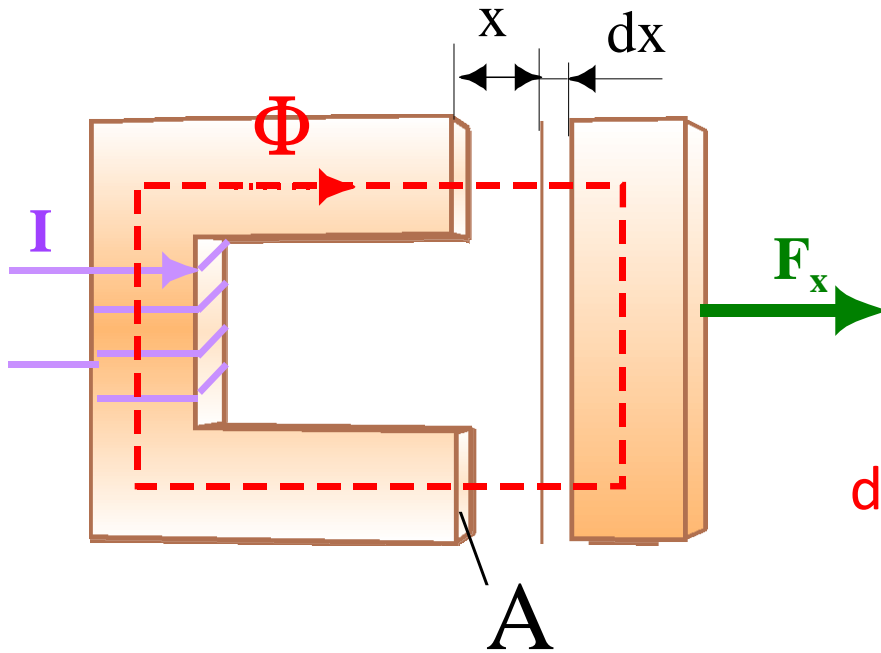


$$W_m = \int_0^\infty u i dt = \int_0^\infty \frac{d\psi}{dt} i dt$$

mit $\Psi = L \cdot i$ wird:

$$W_m = \int_0^\infty \frac{d(L \cdot i)}{dt} i dt$$

für $L = \text{konstant}$ wird $W_m = L \cdot \int_0^I i \cdot di = \frac{L}{2} \cdot I^2$



$$W_m = \frac{L}{2} \cdot I^2$$

Voraussetzung: $I = \text{konstant}$

Energiebilanz für den linearen Fall:

$$dW_{\text{elektrisch}} = dW_{\text{magnetisch}} + dW_{\text{mechanisch}}$$

$$u \, i \, dt = d \frac{L \cdot i^2}{2} + F \, dx$$

$$u = \frac{d\Psi}{dt} = L \frac{di}{dt} + i \frac{dL}{dt}$$

(mit konstantem i entfällt der erste Summand)

$$\frac{dL}{dt} \cdot i \cdot i \cdot dt = \frac{i^2}{2} dL + F \, dx$$

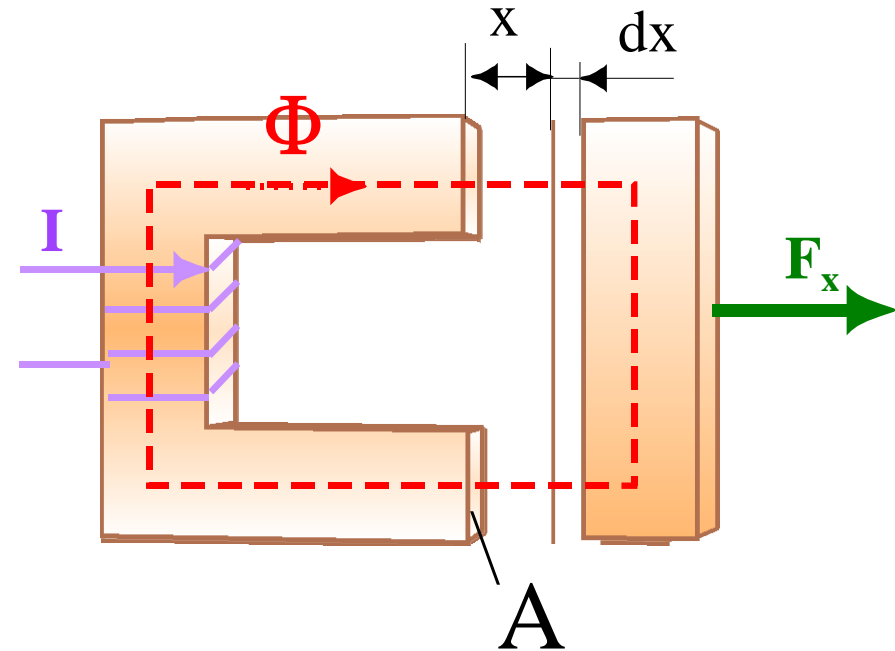
$$\frac{dL}{dt} \cdot i \cdot i \cdot dt = \frac{i^2}{2} dL + F dx$$

$$\frac{dL}{dt} \cdot i^2 dt = \frac{i^2}{2} dL + F dx$$

$$F dx = \frac{i^2}{2} dL$$

$$F(x) = \frac{i^2}{2} \cdot \frac{dL(x)}{dx}$$

Induktivität ändert sich mit x!



Berechnung von L(x):

$$L = \frac{w^2}{R_m} = \frac{w^2}{R_{mFe} + R_{m\delta}(1 - \sigma)}$$

$$L = \frac{w^2}{R_m} = \frac{w^2}{R_{mFe} + R_{m\delta}(1 - \sigma)}$$

Vereinfachungen für folgenden Spezialfall:

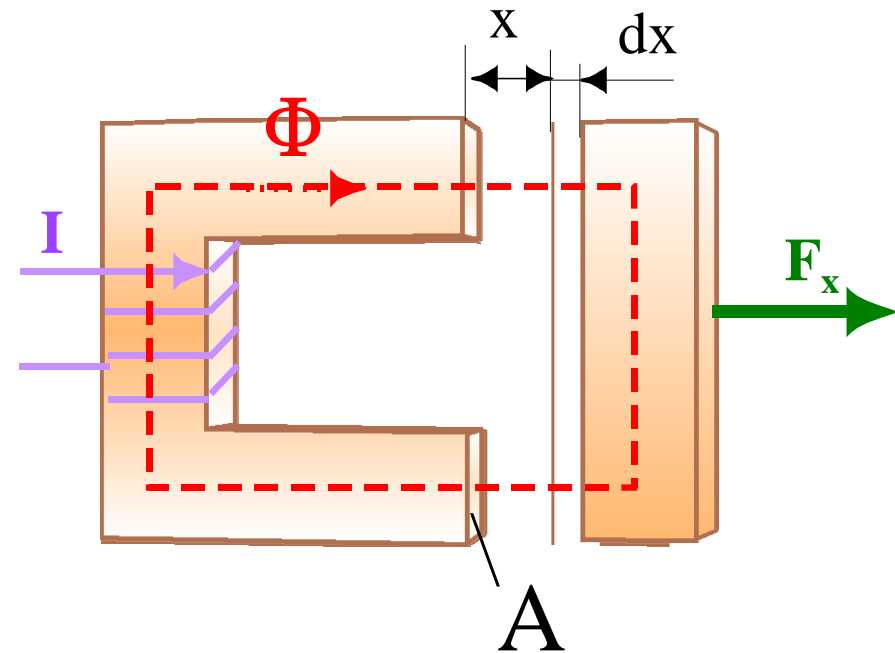
- 1.) Permeabilität des Eisens $\mu_{Fe} \rightarrow \infty$
- 2.) Streufaktor $\sigma = 0$
- 3.) $I = \text{konstant}$

Dann gilt:

$$L \approx \frac{w^2}{R_{m\delta}}$$

$$R_{m\delta} = \frac{2 \cdot x}{\mu_0 \cdot A}$$

$$L = \frac{w^2 \mu_0 A_\delta}{2 \cdot x}$$



$$L = \frac{w^2 \mu_0 A_\delta}{2 \cdot x} \quad \left(\frac{1}{x}\right)' = \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$F(x) = \frac{i^2}{2} \cdot \frac{dL(x)}{dx}$$

$$\frac{dL}{dx} = -\frac{w^2 \mu_0 A_\delta}{2 \cdot x^2}$$

$$F(x) = \frac{i^2}{2} \cdot \frac{dL(x)}{dx}$$

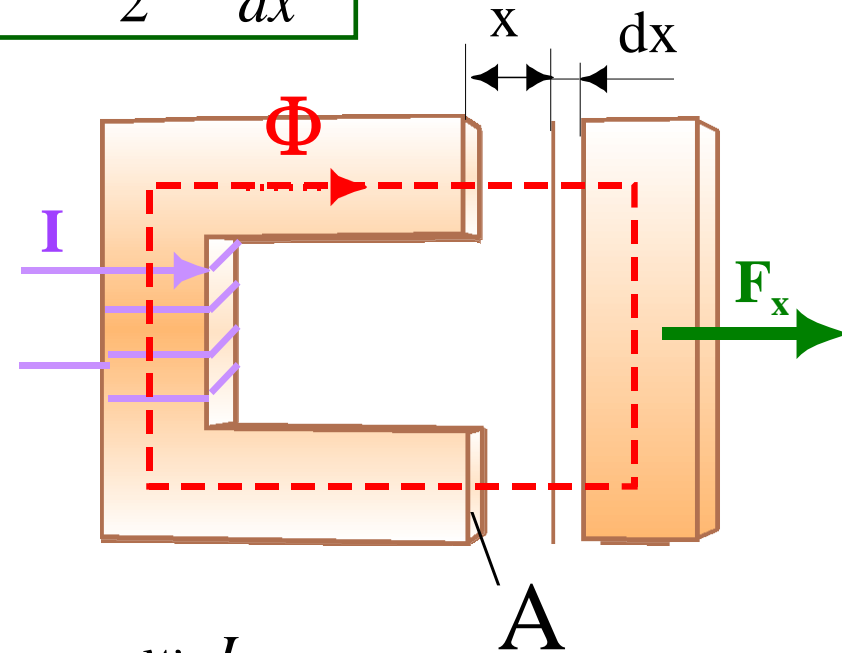
$$F(x) = -\frac{i^2}{2} \cdot \frac{w^2 \mu_0 A_\delta}{2 \cdot x^2}$$

$$|F_x| = H^2 \cdot \mu_0 \cdot A_\delta = 2 \cdot F_p$$

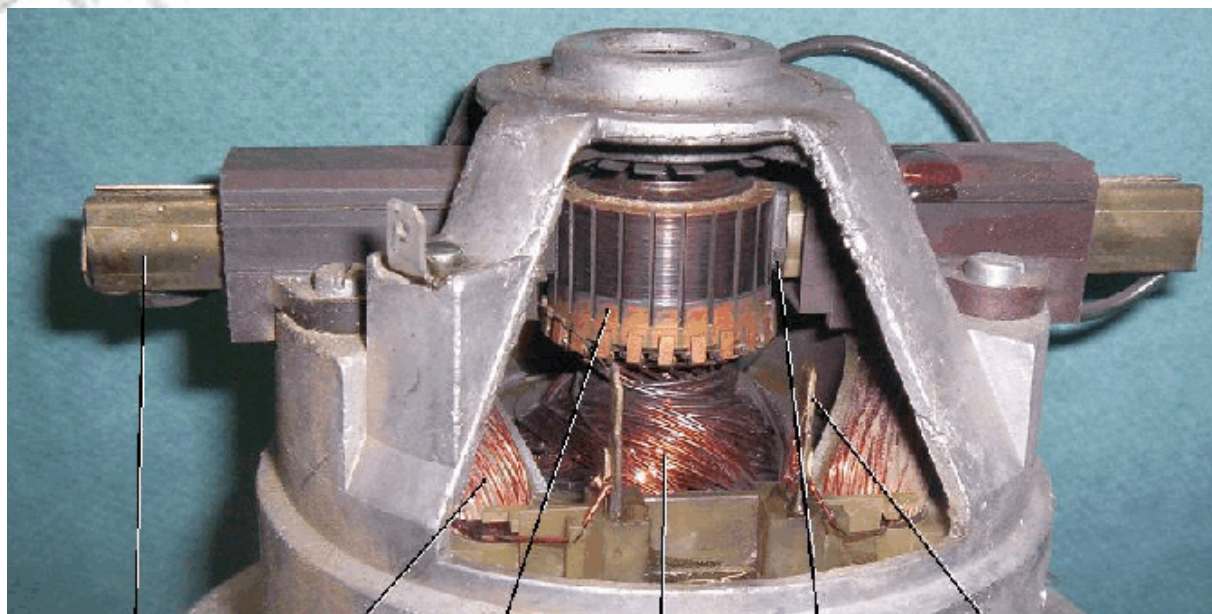
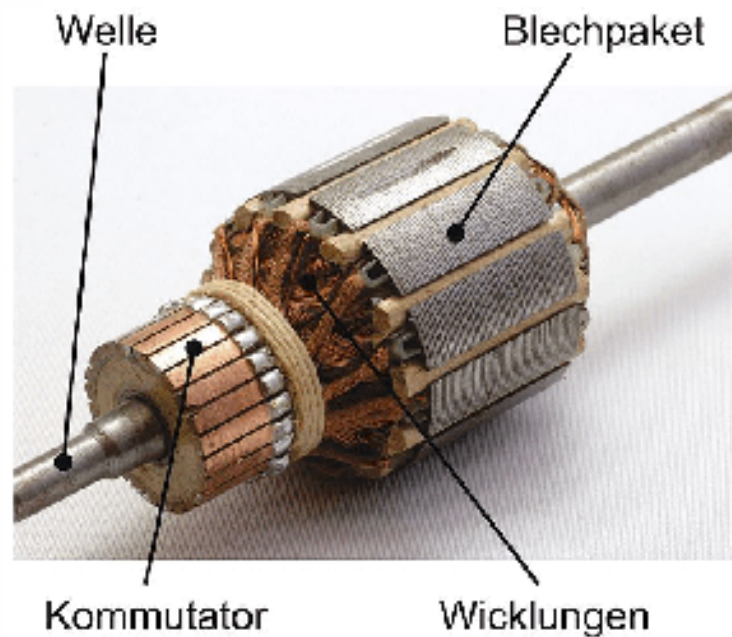
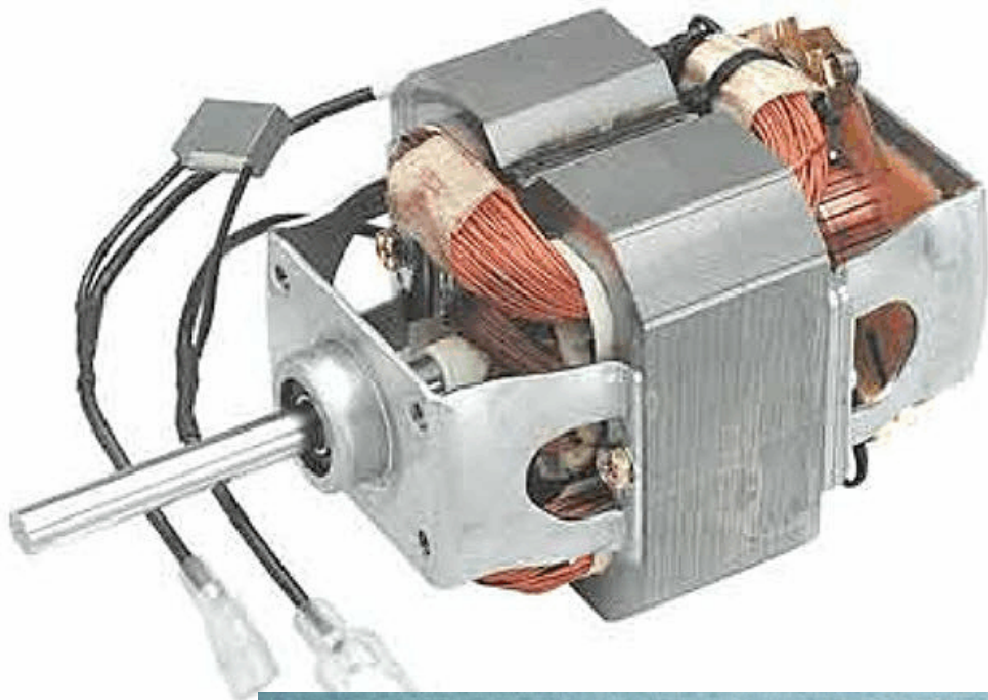
$$|F_p| = \frac{B^2 A_\delta}{2 \mu_0}$$

(Maxwell'sche Zugkraftformel)

$$H = \frac{V_{\text{umlauf}}}{l} = \frac{w \cdot I}{2 \cdot x}$$



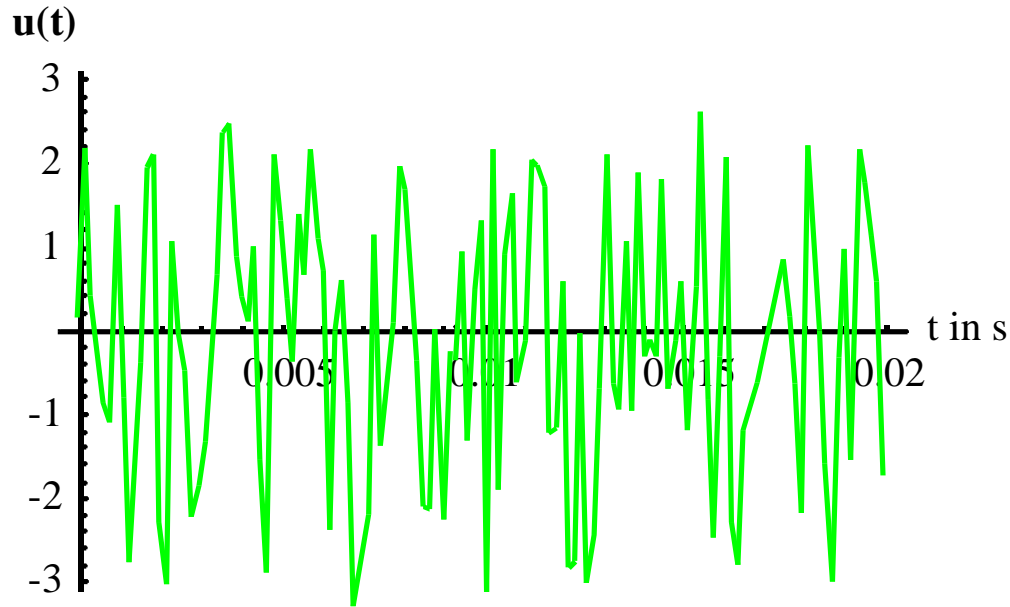
$$H = \frac{B}{\mu_0}$$



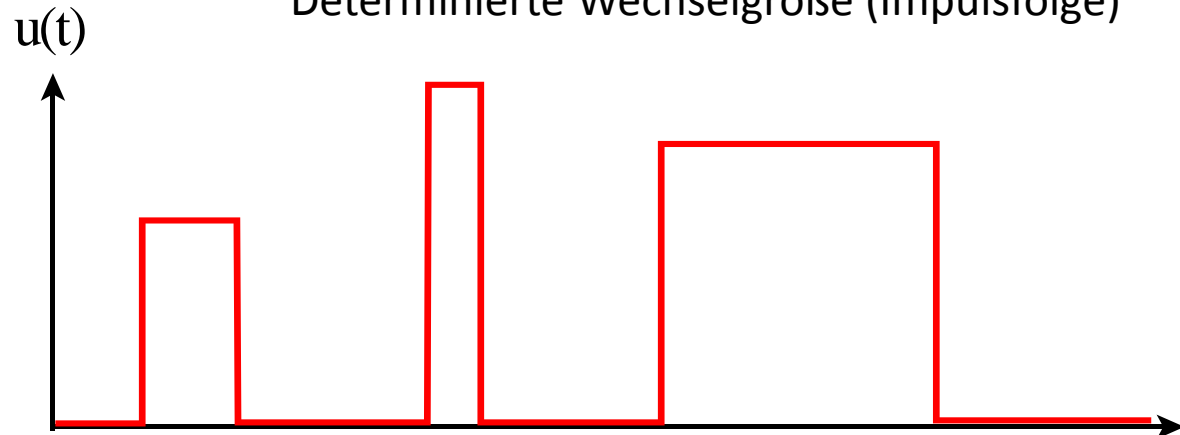
Bürstenhalter Statorwicklung Kommutator Ankerwicklung Kohlebürste Stromanschlüsse

6 Die Berechnung von Wechselstromkreisen bei sinusförmiger Erregung

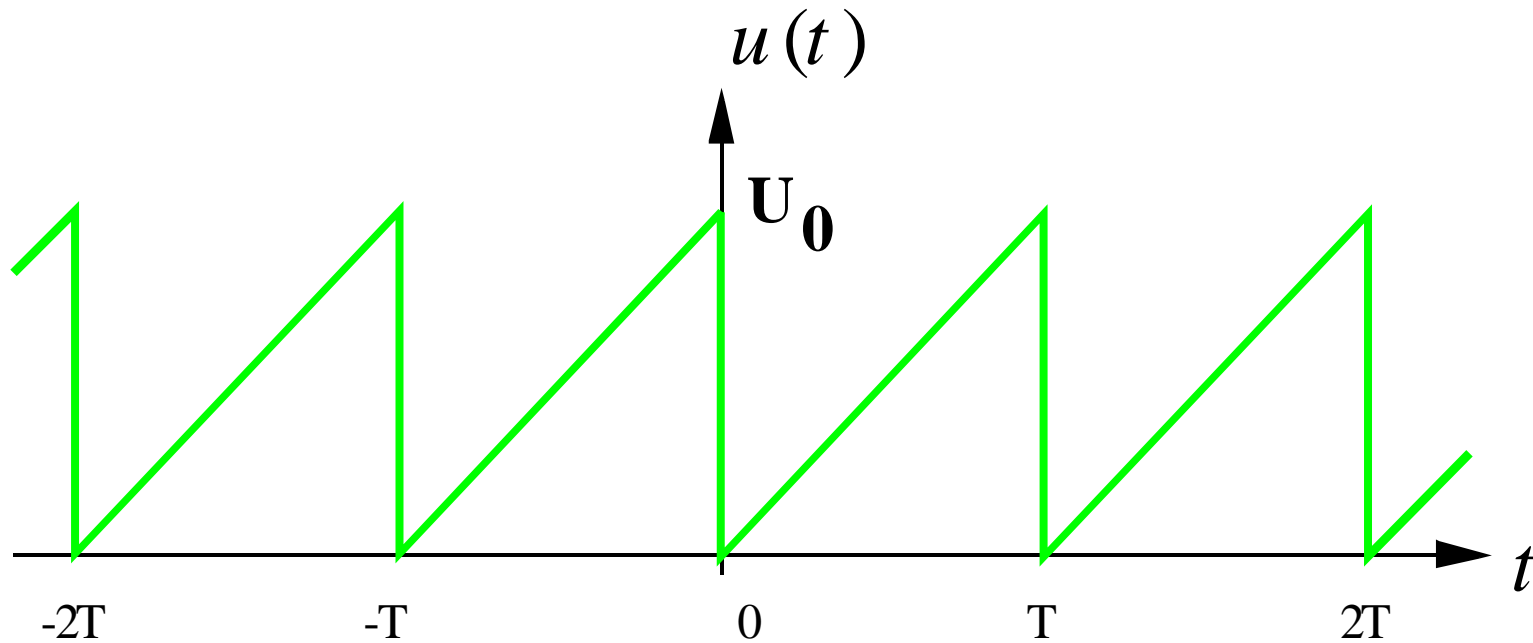
Zufällige (stochastische) Wechselgröße (Rauschsignal)



Determinierte Wechselgröße (Impulsfolge)



Periodische determinierte Wechselgröße (Sägezahnspannung)

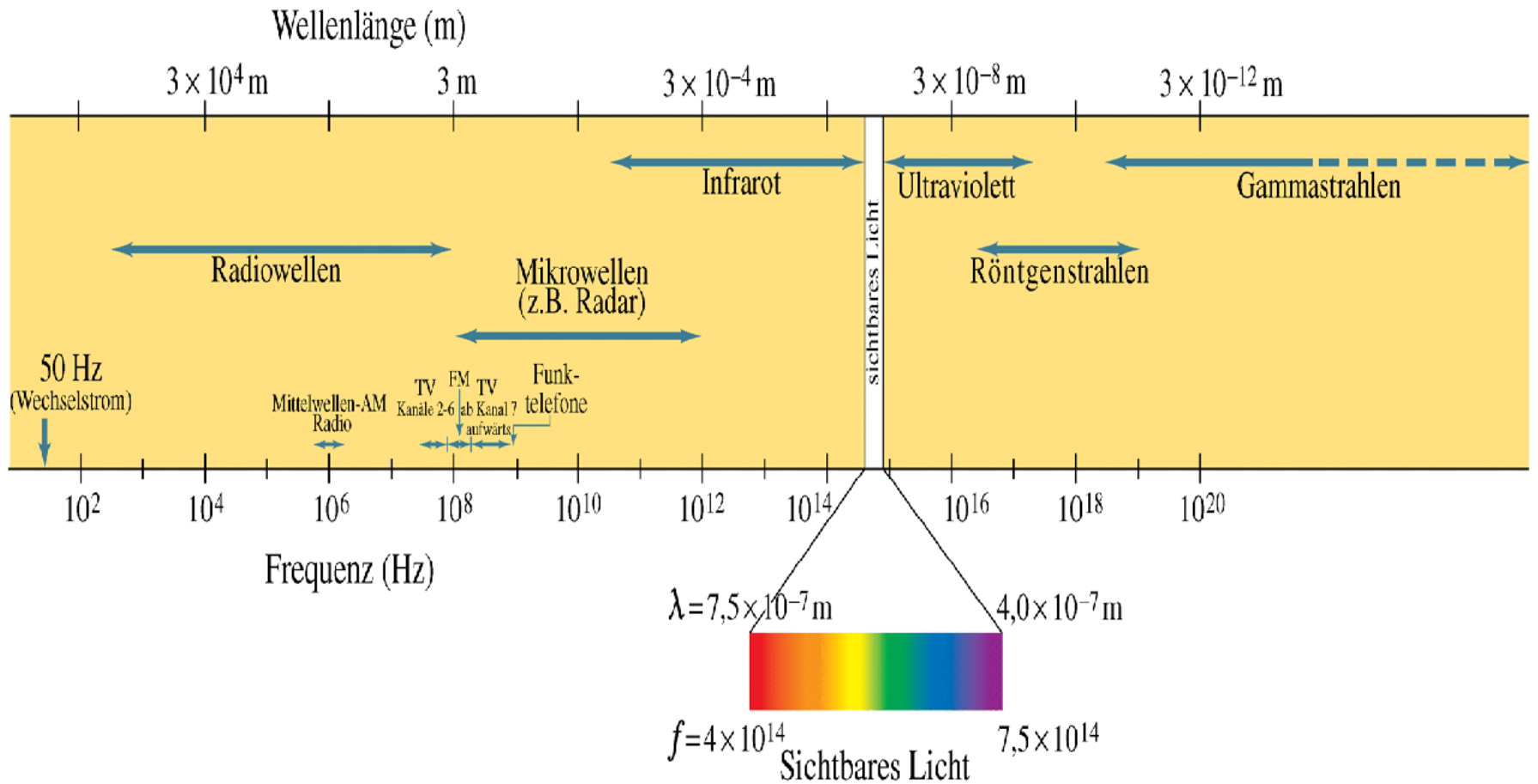


$$x(t) = x(t + nT) \quad n - \text{ganz} \quad T - \text{Periodendauer}$$

$$f = \frac{1}{T} \quad f - \text{Frequenz}$$

$$[f] = \frac{1}{[T]} = 1\text{s}^{-1} = 1\text{Hz}$$

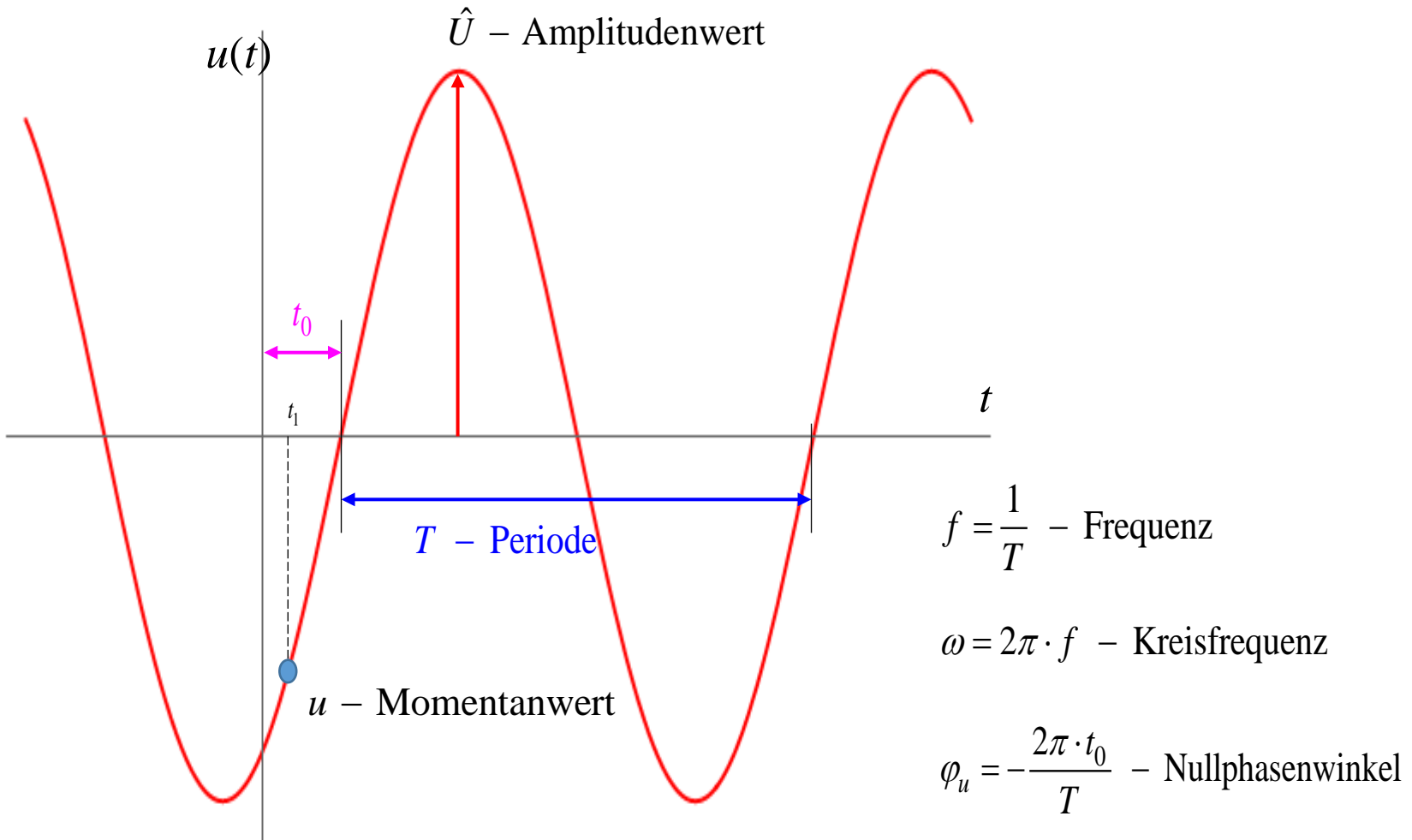
Frequenzbereiche elektromagnetischer Schwingungen und Wellen



6.1 Kenngrößen und Darstellung sinusförmiger Zeitfunktionen

Analytische Darstellung $u(t) = \hat{U} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_u)$

Grafische Darstellung mit Parametern

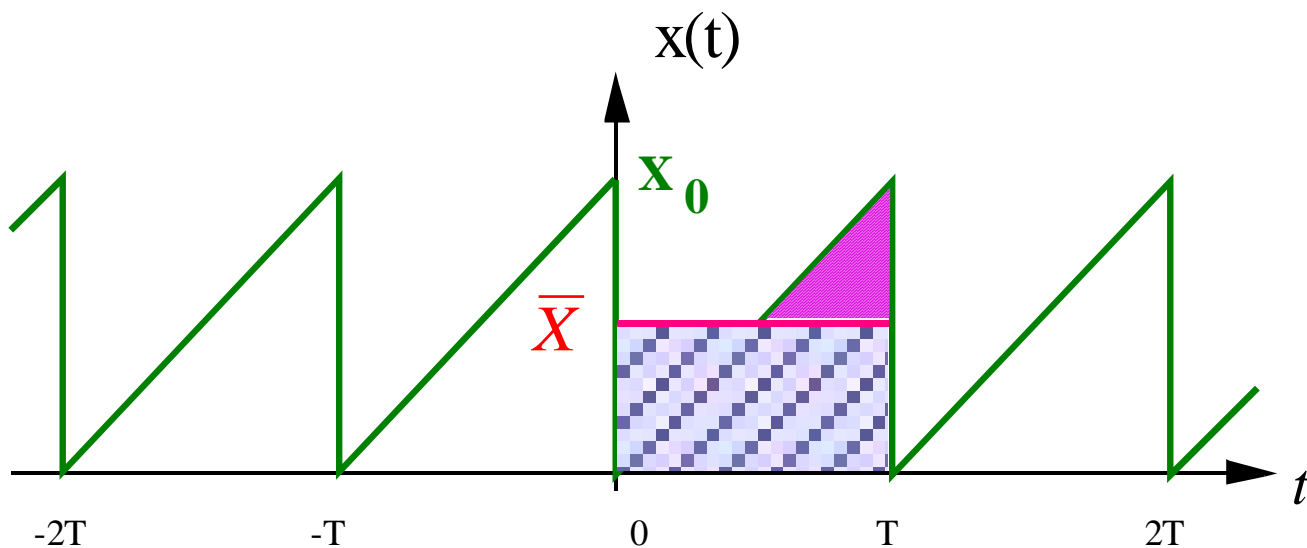


6.1.1 Kennwerte zur Beurteilung von Wechselgrößen

1. Maximalwert oder Amplitude

$$\hat{X} = \max(x(t))$$

2. Gleichwert oder arithmetischer Mittelwert



$$\bar{X} T = \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) dt$$

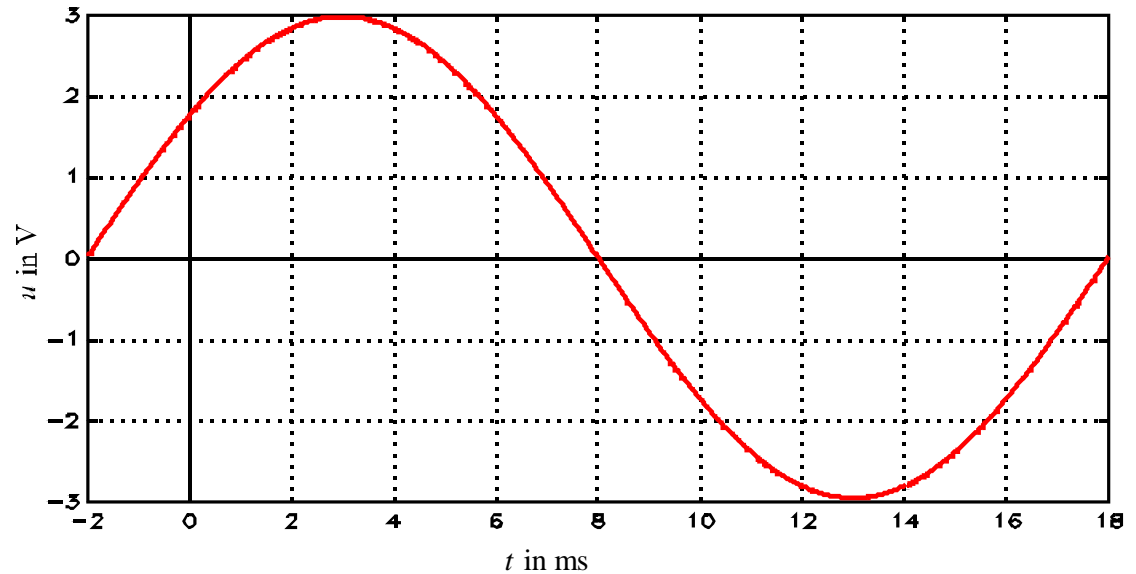
$$\bar{X} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) dt$$

für sinusförmige
Wechselgrößen:

$$\bar{X} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \hat{X} \sin(\omega t + \varphi) dt = 0$$

3. Gleichrichtwert

$$|\bar{X}| = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} |x(t)| dt$$



für sinusförmige Wechselgrößen:

$$|\bar{X}| = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} |\hat{X} \sin \omega t| dt = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \hat{X} \sin \omega t dt$$

$$|\bar{X}| = \frac{2}{\omega T} \hat{X} \left[-\cos \omega t \right]_0^{\frac{T}{2}} = \frac{1}{\pi} (\cos 0 - \cos \pi) \hat{X} = \frac{2}{\pi} \hat{X}$$

4. Effektivwert

$$p_{el} = ui = \frac{u^2}{R} = i^2 R$$

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \frac{u^2(t)}{R} dt = \frac{U^2}{R}$$

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u^2(t) dt}$$

$$X = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x^2(t) dt}$$

für sinusförmige Wechselgrößen:

$$X = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \hat{X}^2 \sin^2(\omega t) dt}$$

$$\sin^2(\omega t) = \frac{1}{2} [1 - \cos(2\omega t)]$$

$$X = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \hat{X}^2 \frac{1}{2} [1 - \cos(2\omega t)] dt}$$

$$X = \sqrt{\frac{1}{T} \frac{\hat{X}^2}{2} t \Big|_{t_0}^{t_0+T}} = \frac{\hat{X}}{\sqrt{2}}$$