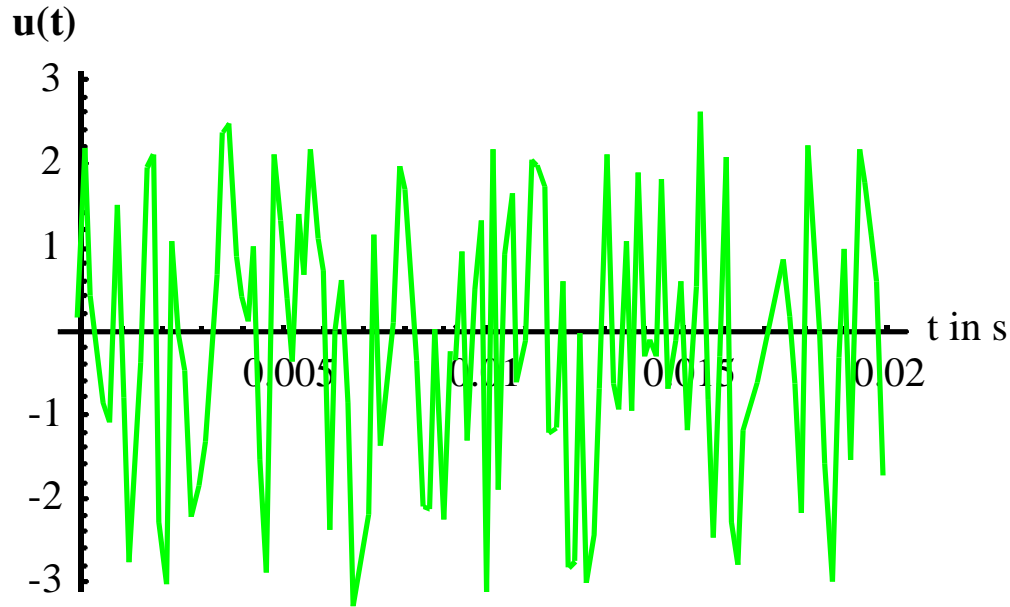
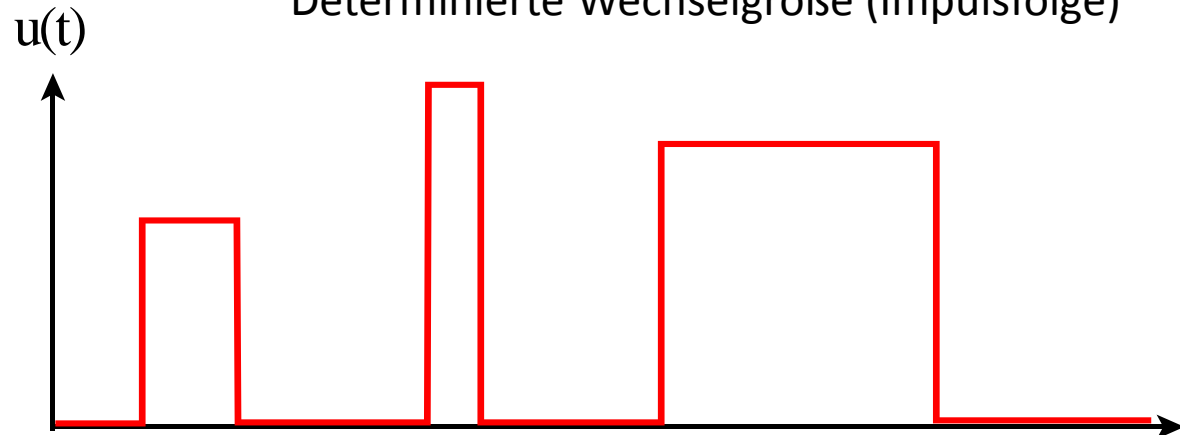


# 6 Die Berechnung von Wechselstromkreisen bei sinusförmiger Erregung

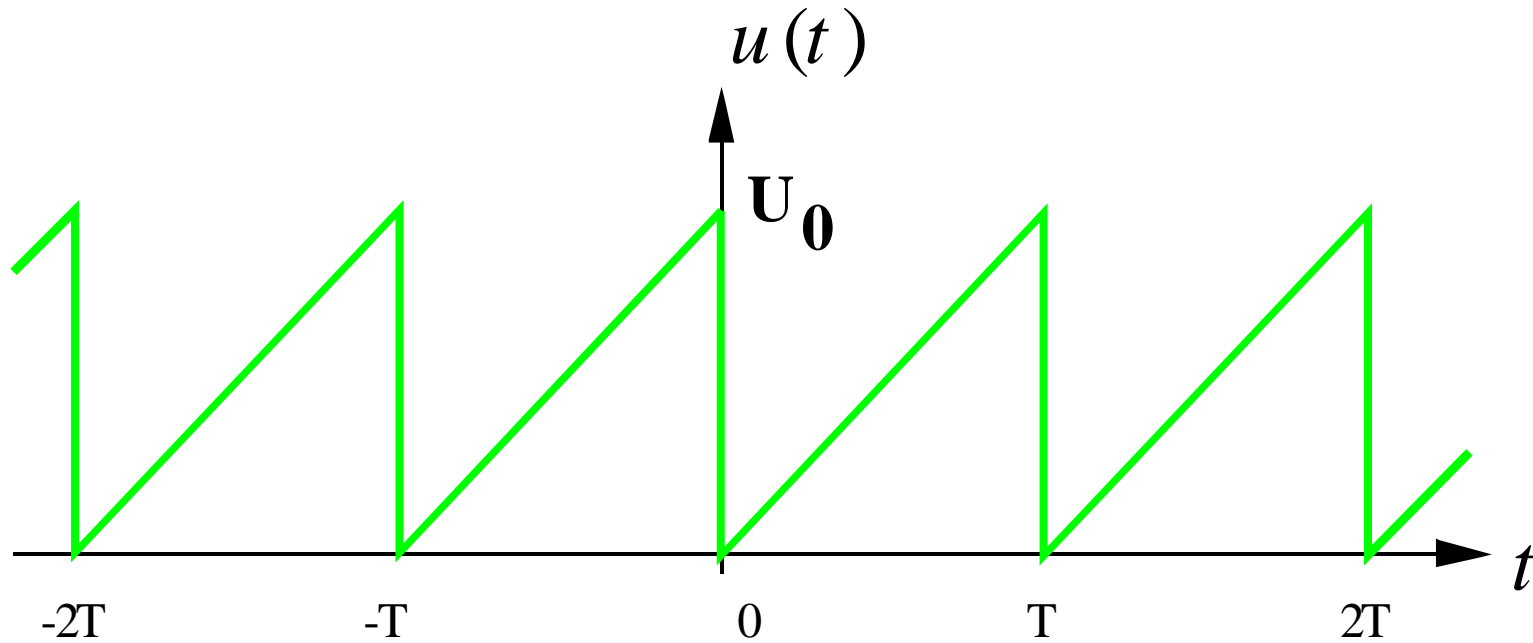
Zufällige (stochastische) Wechselgröße (Rauschsignal)



Determinierte Wechselgröße (Impulsfolge)



# Periodische determinierte Wechselgröße (Sägezahnspannung)

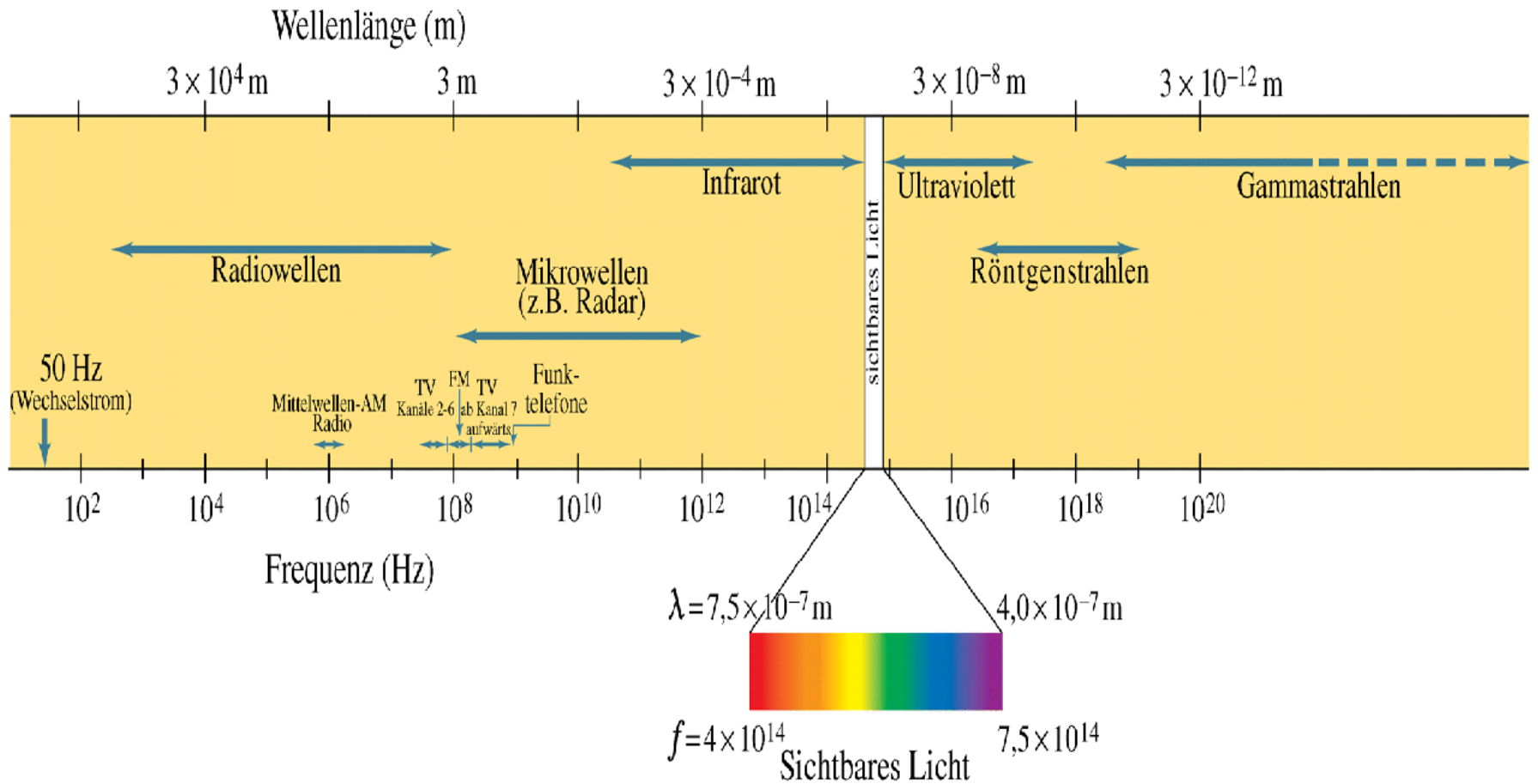


$$x(t) = x(t + nT) \quad n - \text{ganz} \quad T - \text{Periodendauer}$$

$$f = \frac{1}{T} \quad f - \text{Frequenz}$$

$$[f] = \frac{1}{[T]} = 1\text{s}^{-1} = 1\text{Hz}$$

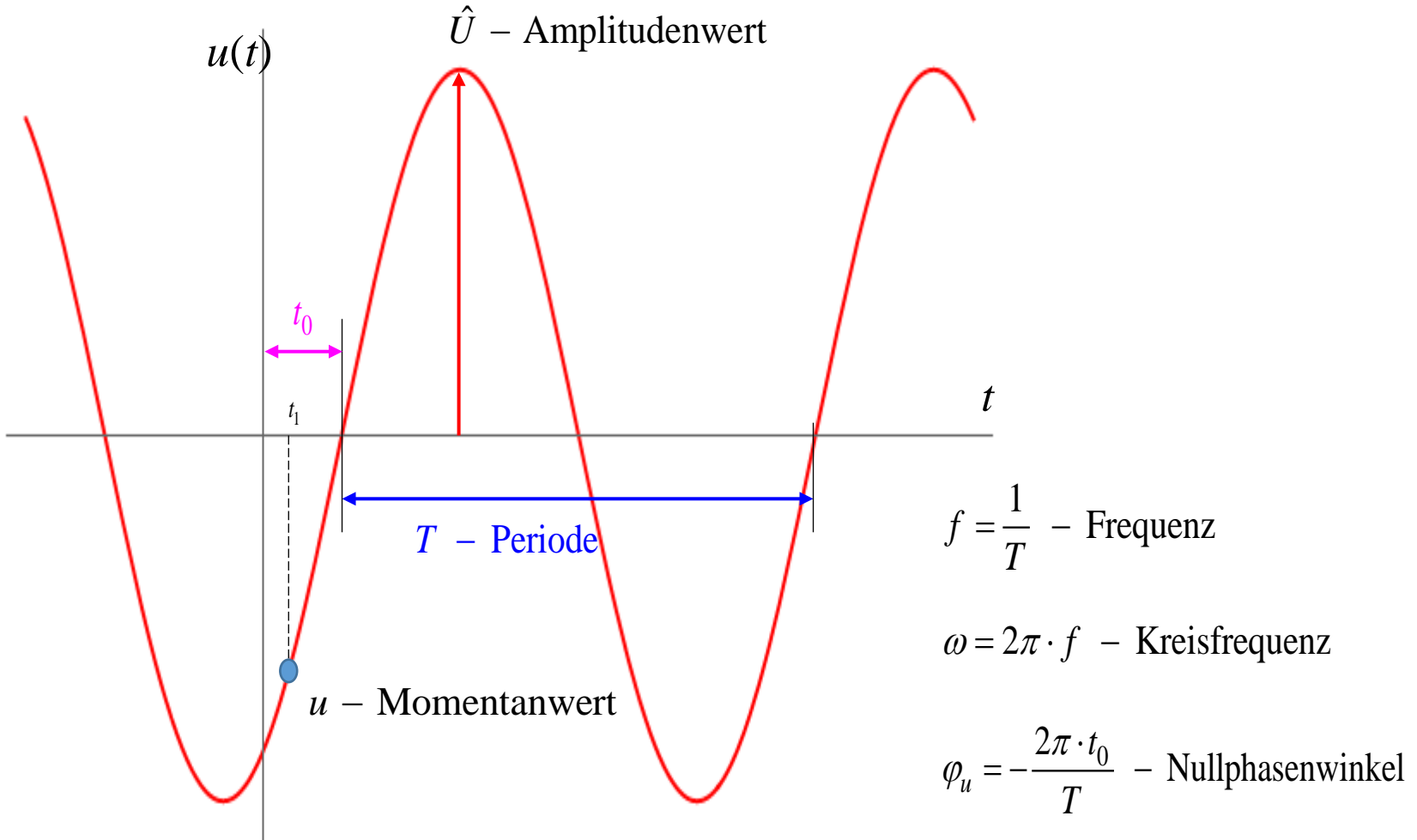
# Frequenzbereiche elektromagnetischer Schwingungen und Wellen



## 6.1 Kenngrößen und Darstellung sinusförmiger Zeitfunktionen

Analytische Darstellung  $u(t) = \hat{U} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_u)$

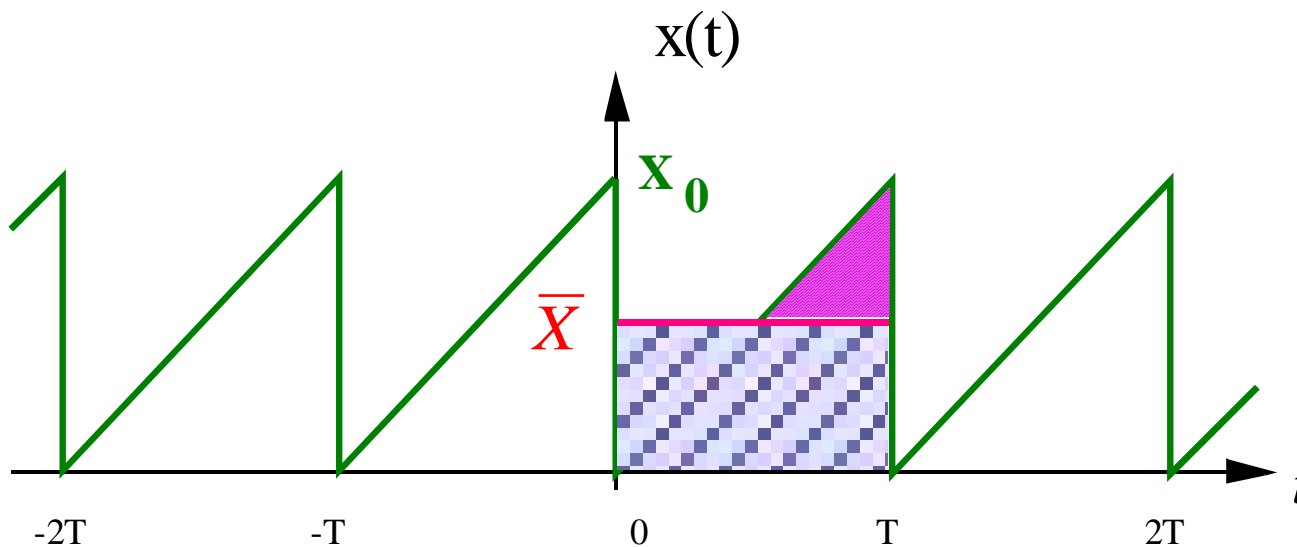
Grafische Darstellung mit Parametern



## 1. Maximalwert oder Amplitude

$$\hat{X} = \max(x(t))$$

## 2. Gleichwert oder arithmetischer Mittelwert



$$\bar{X} T = \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) dt$$

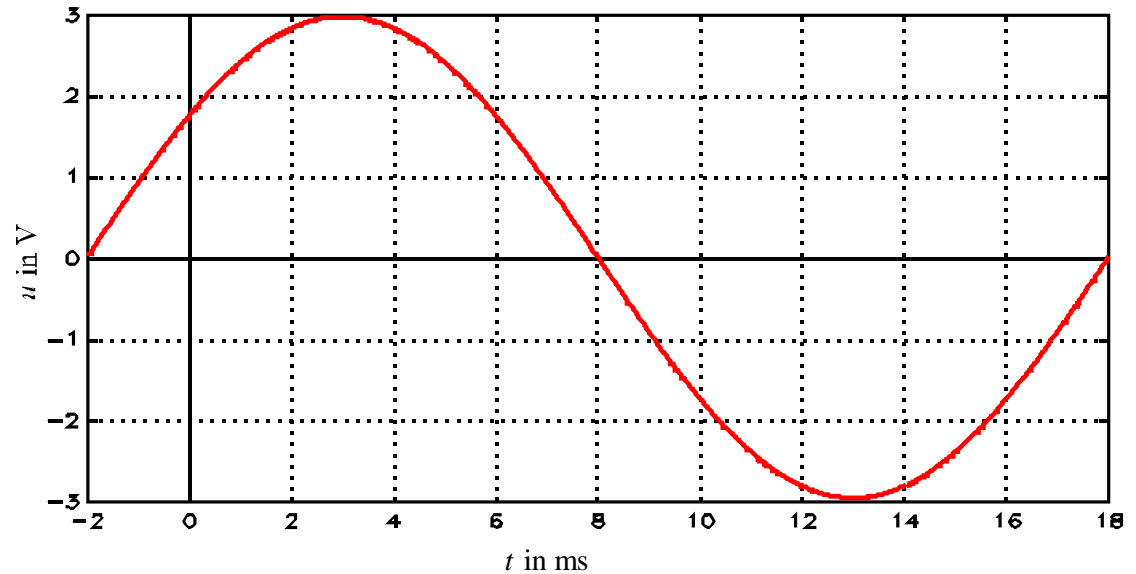
$$\bar{X} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) dt$$

für sinusförmige  
Wechselgrößen:

$$\bar{X} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \hat{X} \sin(\omega t + \varphi) dt = 0$$

### 3. Gleichrichtwert

$$|\bar{X}| = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} |x(t)| dt$$



für sinusförmige Wechselgrößen:

$$|\bar{X}| = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} |\hat{X} \sin \omega t| dt = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \hat{X} \sin \omega t dt$$

$$|\bar{X}| = \frac{2}{\omega T} \hat{X} \left[ -\cos \omega t \right]_0^{\frac{T}{2}} = \frac{1}{\pi} (\cos 0 - \cos \pi) \hat{X} = \frac{2}{\pi} \hat{X}$$

## 4. Effektivwert

$$p_{el} = ui = \frac{u^2}{R} = i^2 R$$

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \frac{u^2(t)}{R} dt = \frac{U^2}{R}$$

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u^2(t) dt}$$

$$X = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x^2(t) dt}$$

für sinusförmige Wechselgrößen:

$$X = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \hat{X}^2 \sin^2(\omega t) dt}$$

$$\sin^2(\omega t) = \frac{1}{2} [1 - \cos(2\omega t)]$$

$$X = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \hat{X}^2 \frac{1}{2} [1 - \cos(2\omega t)] dt}$$

$$X = \sqrt{\frac{1}{T} \frac{\hat{X}^2}{2} t \Big|_{t_0}^{t_0+T}} = \frac{\hat{X}}{\sqrt{2}}$$

## Analytische Darstellung

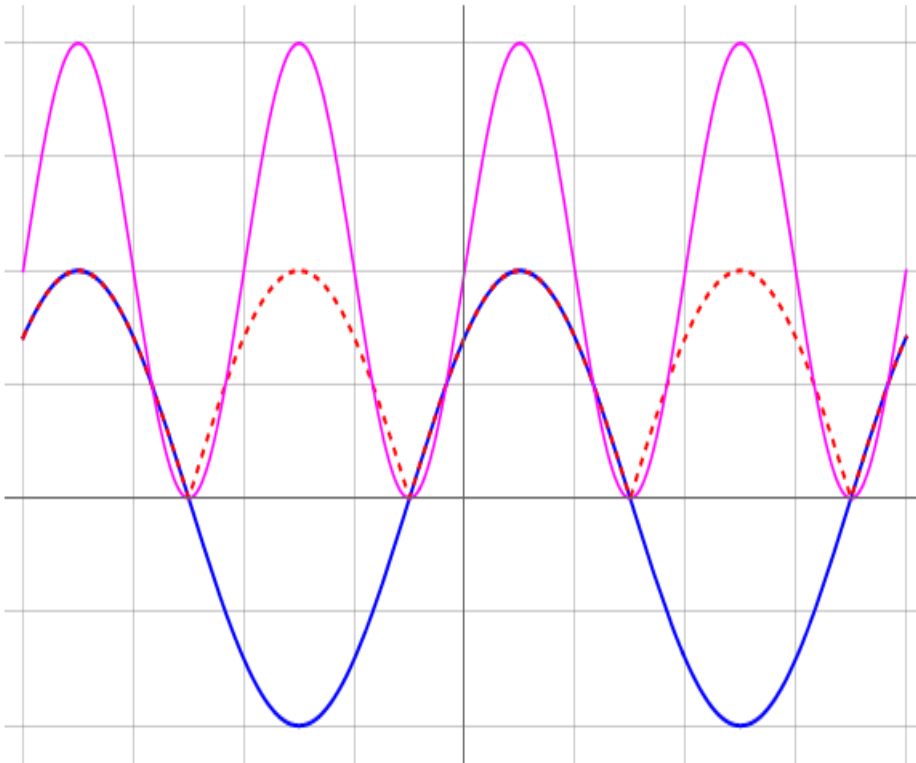
$$u(t) = \hat{U} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_u)$$

## Kenngrößen

$$\text{Effektivwert: } U = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T} u^2(t) dt}$$

$$U_{\sin} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T} \hat{U}^2 \cdot \sin^2(\omega \cdot t + \varphi_u) dt} = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}}$$

## Grafische Darstellung $u(t)$ $|u(t)|$ $u^2(t)$



$$\text{Gleichwert: } \bar{u} = \frac{1}{T} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T} u(t) dt$$

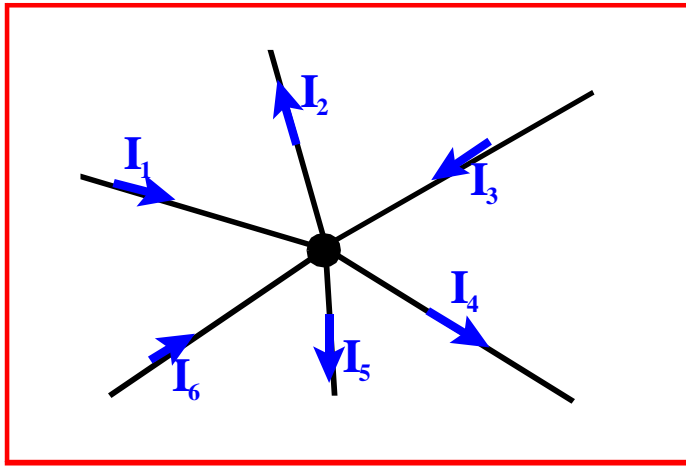
$$\bar{u}_{\sin} = \frac{1}{T} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T} \hat{U} \sin(\omega \cdot t + \varphi_u) \cdot dt = 0$$



## 6.2 Analyse von Wechselstromschaltungen im Zeitbereich

### 6.2.1 Die Kirchhoffschen Sätze

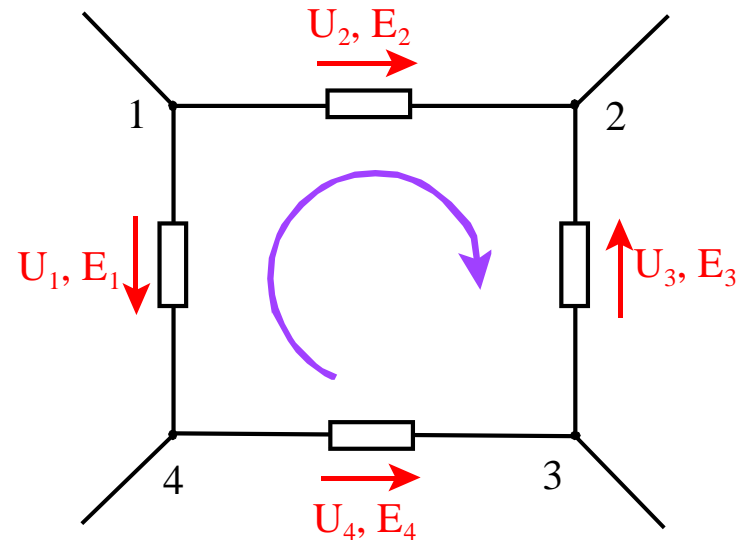
Knotensatz (1. Kirchhoffscher Satz)



**Knotensatz (1. Kirchhoffscher Satz)**

$$\sum_k i_k(t) = 0$$

Maschensatz (2. Kirchhoffscher Satz)

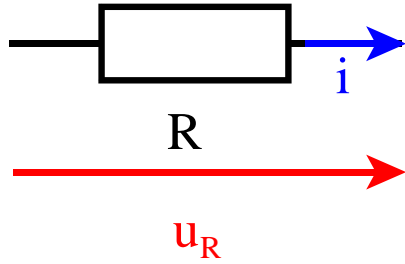


**Maschensatz  
(2. Kirchhoffscher Satz)**

$$\sum_l u_l(t) = 0$$

## 6.2.2 passive Bauelemente an Wechselspannung

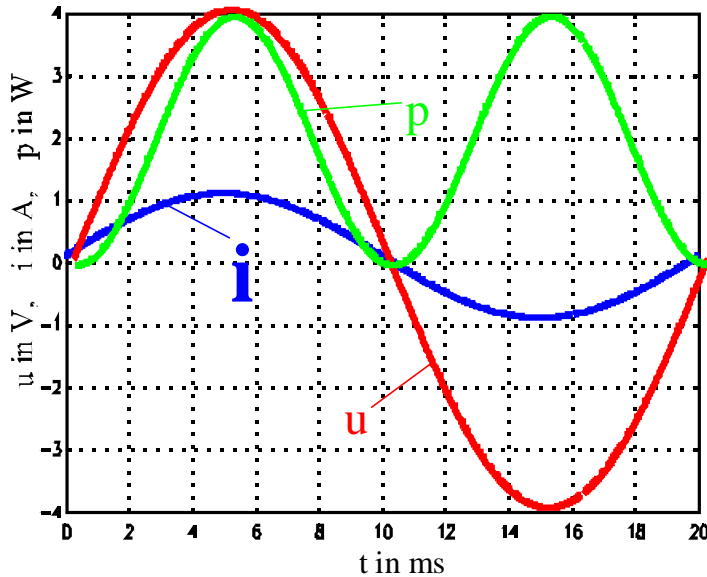
### Widerstand



$$i = \hat{I} \sin(\omega t + \varphi_i)$$

$$u_R = R i$$

$$u_R = R \hat{I} \sin(\omega t + \varphi_i) = \hat{U}_R \sin(\omega t + \varphi_{uR})$$

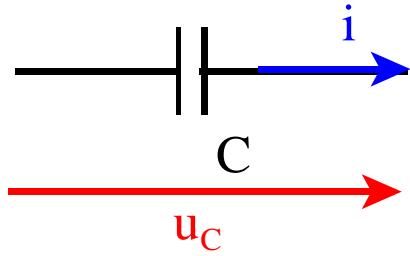


$$\hat{U}_R = R \hat{I}$$

$$\varphi_{uR} = \varphi_i$$

$$\Delta \varphi = \varphi_{uR} - \varphi_i = 0$$

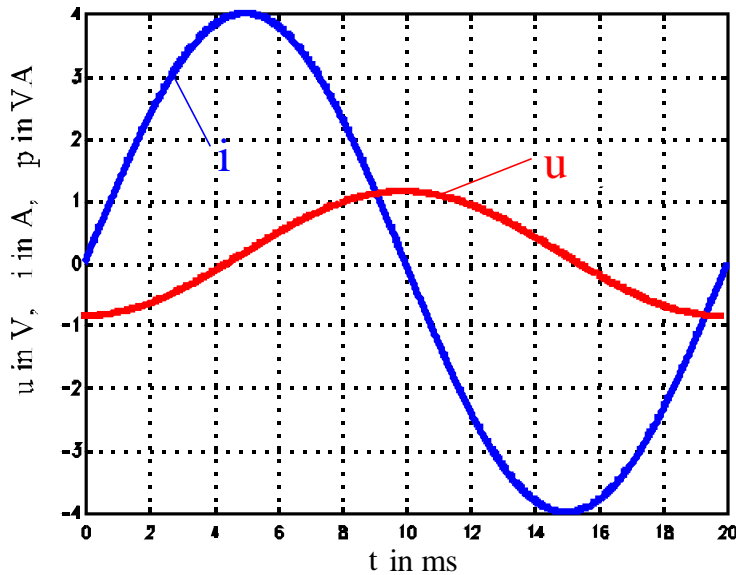
# Kapazität



$$i = \hat{I} \sin(\omega t + \varphi_i)$$

$$u_C = \frac{1}{C} \int i dt$$

$$u_C = \frac{1}{C} \int \hat{I} \sin(\omega t + \varphi_i) dt$$



$$z = \omega t + \varphi_i \quad \frac{dz}{dt} = \omega \quad dt = \frac{dz}{\omega}$$

$$u_C = \frac{1}{\omega C} \int \hat{I} \sin z dz = -\frac{1}{\omega C} \hat{I} \cos z$$

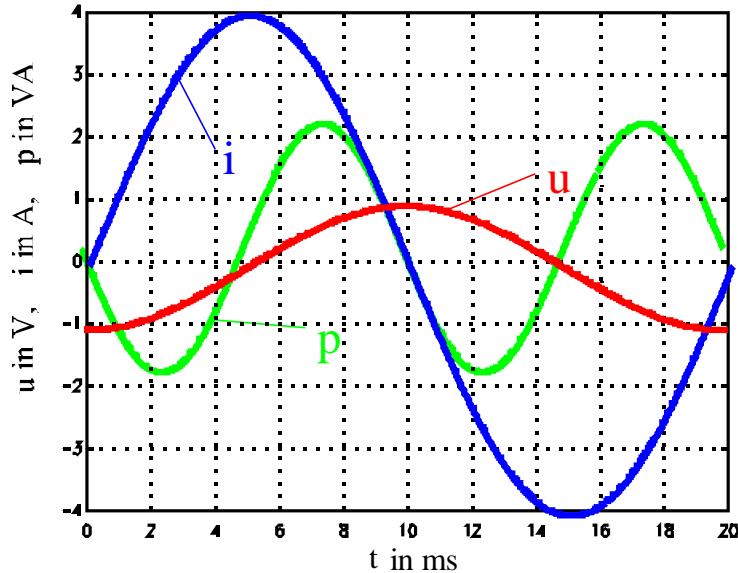
$$u_C = \frac{1}{\omega C} \cdot \hat{I} \cdot \sin\left(\omega t + \varphi_i - \frac{\pi}{2}\right) = \hat{U}_c \sin(\omega t + \varphi_{u_C})$$

$$u_c = \frac{1}{\omega C} \cdot \hat{I} \cdot \sin(\omega t + \varphi_i - \frac{\pi}{2}) = \hat{U}_c \sin(\omega t + \varphi_{uc})$$

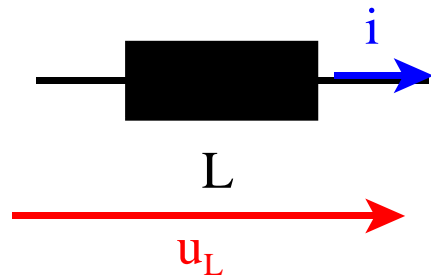
$$\hat{U}_c = \frac{1}{\omega C} \hat{I}$$

$$\varphi_{uc} = \varphi_i - \frac{\pi}{2}$$

$$\Delta \varphi = \varphi_{uc} - \varphi_i = -\frac{\pi}{2}$$



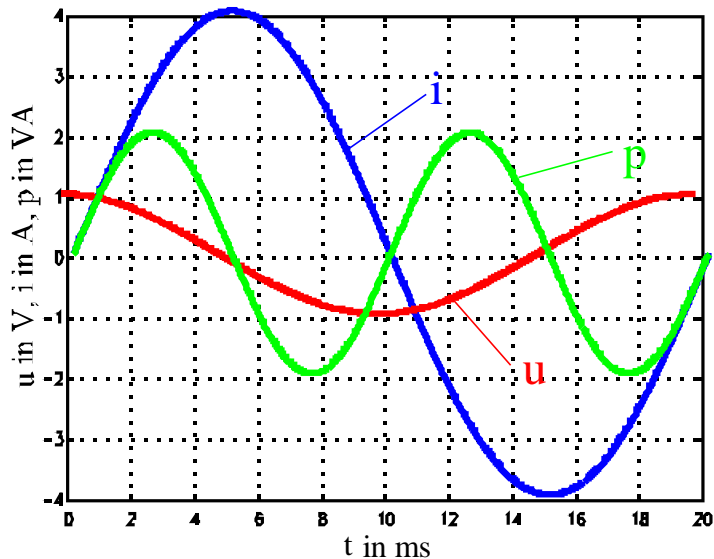
# Induktivität



$$i = \hat{I} \sin(\omega t + \varphi_i)$$

$$u_L = L \frac{di}{dt}$$

$$u_L = \omega L \hat{I} \cos(\omega t + \varphi_i) = \omega L \hat{I} \sin(\omega t + \varphi_i + \frac{\pi}{2}) = \hat{U}_L \sin(\omega t + \varphi_{uL})$$



$$\hat{U}_L = \omega L \hat{I}$$

$$\varphi_{uL} = \varphi_i + \frac{\pi}{2}$$

$$\Delta \varphi = \varphi_{uL} - \varphi_i = \frac{\pi}{2}$$

### 6.2.3 Addition und Subtraktion sinusförmiger Wechselgrößen bei gleicher Frequenz

$$i_1 = \hat{I}_1 \sin(\omega t + \varphi_{i1}) \qquad i_2 = \hat{I}_2 \sin(\omega t + \varphi_{i2})$$

$$i_1 \pm i_2 = \hat{I}_1 \sin(\omega t + \varphi_{i1}) \pm \hat{I}_2 \sin(\omega t + \varphi_{i2})$$

mit  $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$  folgt :

$$i_1 \pm i_2 = \hat{I}_1 (\sin(\omega t) \cos \varphi_{i1} + \cos(\omega t) \sin \varphi_{i1}) \pm \hat{I}_2 (\sin(\omega t) \cos \varphi_{i2} + \cos(\omega t) \sin \varphi_{i2})$$

$$i_1 \pm i_2 = (\hat{I}_1 \cos \varphi_{i1} \pm \hat{I}_2 \cos \varphi_{i2}) \sin(\omega t) + (\hat{I}_1 \sin \varphi_{i1} \pm \hat{I}_2 \sin \varphi_{i2}) \cos(\omega t)$$

Ansatz:

$$i_3 = i_1 \pm i_2 = \hat{I}_3 \sin(\omega t + \varphi_{i3})$$

$$i_1 \pm i_2 = \left( \hat{I}_1 \cos \varphi_{i1} \pm \hat{I}_2 \cos \varphi_{i2} \right) \sin(\omega t) + \left( \hat{I}_1 \sin \varphi_{i1} \pm \hat{I}_2 \sin \varphi_{i2} \right) \cos(\omega t)$$

Ansatz:

$$i_3 = i_1 \pm i_2 = \hat{I}_3 \sin(\omega t + \varphi_{i3})$$

$$\hat{I}_3 \sin(\omega t + \varphi_{i3}) = \left( \hat{I}_1 \cos \varphi_{i1} \pm \hat{I}_2 \cos \varphi_{i2} \right) \sin(\omega t) + \left( \hat{I}_1 \sin \varphi_{i1} \pm \hat{I}_2 \sin \varphi_{i2} \right) \cos(\omega t)$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\hat{I}_3 \left( \sin(\omega t) \cos \varphi_{i3} + \cos(\omega t) \sin \varphi_{i3} \right) = \left( \hat{I}_1 \cos \varphi_{i1} \pm \hat{I}_2 \cos \varphi_{i2} \right) \sin(\omega t) + \left( \hat{I}_1 \sin \varphi_{i1} \pm \hat{I}_2 \sin \varphi_{i2} \right) \cos(\omega t)$$

Koeffizientenvergleich:

$$\sin(\omega t): \quad \hat{I}_3 \cos \varphi_{i3} = \left( \hat{I}_1 \cos \varphi_{i1} \pm \hat{I}_2 \cos \varphi_{i2} \right)$$

$$\cos(\omega t): \quad \hat{I}_3 \sin \varphi_{i3} = \left( \hat{I}_1 \sin \varphi_{i1} \pm \hat{I}_2 \sin \varphi_{i2} \right)$$

Koeffizientenvergleich:

$$\sin(\omega t): \quad \hat{I}_3 \cos \varphi_{i3} = \left( \hat{I}_1 \cos \varphi_{i1} \pm \hat{I}_2 \cos \varphi_{i2} \right)$$

$$\cos(\omega t): \quad \hat{I}_3 \sin \varphi_{i3} = \left( \hat{I}_1 \sin \varphi_{i1} \pm \hat{I}_2 \sin \varphi_{i2} \right)$$

$$\tan \varphi_{i3} = \frac{\hat{I}_3 \sin \varphi_{i3}}{\hat{I}_3 \cos \varphi_{i3}} = \frac{\hat{I}_1 \sin \varphi_{i1} \pm \hat{I}_2 \sin \varphi_{i2}}{\hat{I}_1 \cos \varphi_{i1} \pm \hat{I}_2 \cos \varphi_{i2}}$$

$$\varphi_{i3} = \arctan \left[ \frac{\hat{I}_1 \sin \varphi_{i1} \pm \hat{I}_2 \sin \varphi_{i2}}{\hat{I}_1 \cos \varphi_{i1} \pm \hat{I}_2 \cos \varphi_{i2}} \right]$$



Koeffizientenvergleich:

$$\sin(\omega t): \quad \hat{I}_3 \cos \varphi_{i3} = (\hat{I}_1 \cos \varphi_{i1} \pm \hat{I}_2 \cos \varphi_{i2})$$

$$\cos(\omega t): \quad \hat{I}_3 \sin \varphi_{i3} = (\hat{I}_1 \sin \varphi_{i1} \pm \hat{I}_2 \sin \varphi_{i2})$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$



$$(\hat{I}_3 \sin \varphi_{i3})^2 + (\hat{I}_3 \cos \varphi_{i3})^2 = (\hat{I}_1 \sin \varphi_{i1} \pm \hat{I}_2 \sin \varphi_{i2})^2 + (\hat{I}_1 \cos \varphi_{i1} \pm \hat{I}_2 \cos \varphi_{i2})^2$$

$$\hat{I}_3^2 (\sin^2 \varphi_{i3} + \cos^2 \varphi_{i3}) = (\hat{I}_1 \sin \varphi_{i1} \pm \hat{I}_2 \sin \varphi_{i2})^2 + (\hat{I}_1 \cos \varphi_{i1} \pm \hat{I}_2 \cos \varphi_{i2})^2$$

$$\hat{I}_3^2 = (\hat{I}_1 \sin \varphi_{i1} \pm \hat{I}_2 \sin \varphi_{i2})^2 + (\hat{I}_1 \cos \varphi_{i1} \pm \hat{I}_2 \cos \varphi_{i2})^2$$

$$\hat{I}_3 = \sqrt{(\hat{I}_1 \sin \varphi_{i1} \pm \hat{I}_2 \sin \varphi_{i2})^2 + (\hat{I}_1 \cos \varphi_{i1} \pm \hat{I}_2 \cos \varphi_{i2})^2}$$

Zusammenfassung:

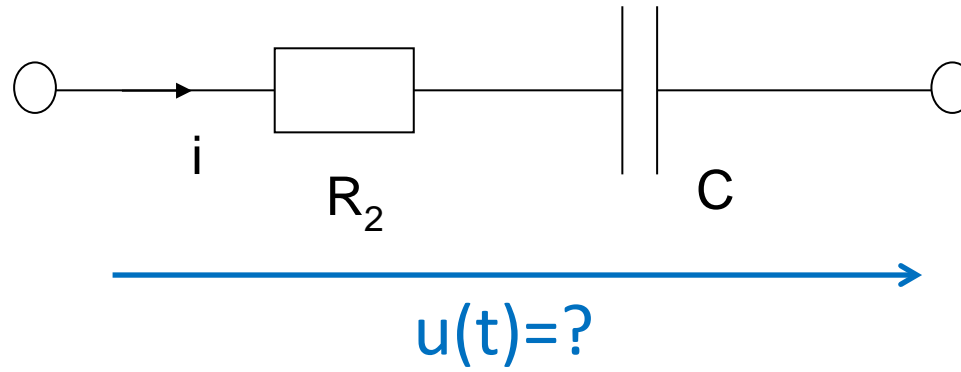
$$i_3 = i_1 \pm i_2 = \hat{I}_3 \sin(\omega t + \varphi_{i3})$$

$$\hat{I}_3 = \sqrt{\left(\hat{I}_1 \sin \varphi_{i1} \pm \hat{I}_2 \sin \varphi_{i2}\right)^2 + \left(\hat{I}_1 \cos \varphi_{i1} \pm \hat{I}_2 \cos \varphi_{i2}\right)^2}$$

$$\varphi_{i3} = \arctan \left[ \frac{\hat{I}_1 \sin \varphi_{i1} \pm \hat{I}_2 \sin \varphi_{i2}}{\hat{I}_1 \cos \varphi_{i1} \pm \hat{I}_2 \cos \varphi_{i2}} \right]$$

## Beispiel Reihenschaltung R und C

$$\begin{aligned}i &= 1,414\text{A} \sin \omega t \\R_2 &= 120 \Omega \\C &= 30 \mu\text{F} \\f &= 50 \text{ Hz}\end{aligned}$$



bekannte Merkmale der Lösung :

1. In linearen Netzen sind bei sinusförmiger Erregung alle stationären Vorgänge gleichfalls sinusförmig.
2. In linearen Netzwerken bleibt die Frequenz erhalten.

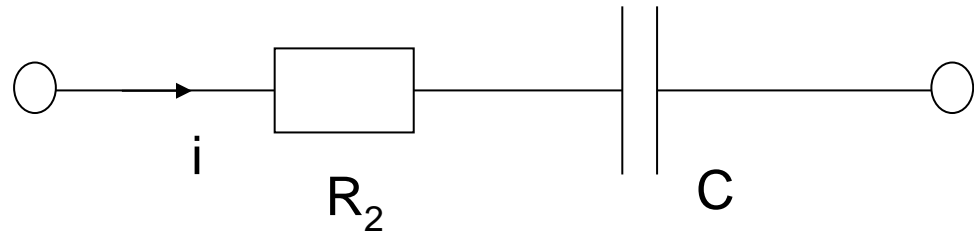
noch benötigte Informationen :

1. Amplitude der Lösung

2. Startphase der Lösung

**Ansatz :**  $u = \hat{U} \sin(\omega t + \varphi_u)$

$i = 1,414A \sin \omega t$   
 $R_2 = 120 \Omega$   
 $C = 30 \mu F$   
 $f = 50 \text{ Hz}$



$$u_R = i_R \cdot R_2 = \hat{I}R_2 \sin \omega t = 1,414A \cdot 120\Omega \sin \omega t = \underline{\underline{169,7 V \cdot \sin \omega t}}$$

$$-\cos \alpha = \sin(\alpha - 90^\circ)$$

$$u_C = \frac{1}{C} \int i dt = -\frac{1}{\omega C} \cdot \hat{I} \cdot \cos \omega t = \frac{1}{\omega C} \cdot \hat{I} \cdot \sin(\omega t - 90^\circ)$$

$$\underline{\underline{u_C = 150,1V \sin(\omega t - 90^\circ)}}$$

Kap. Scheinwiderstand  $X_C$

$$u = u_R + u_C$$

$$\hat{U} \cdot \sin(\omega t + \varphi_u) = \hat{U}_R \cdot \sin \omega t - \hat{U}_C \cdot \cos \omega t$$

mit  $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$  folgt:

$$\hat{U} \cdot (\sin \omega t \cdot \cos \varphi_u + \cos \omega t \cdot \sin \varphi_u) = \hat{U}_R \cdot \sin \omega t - \hat{U}_C \cdot \cos \omega t$$

Der Koeffizientenvergleich liefert die Gleichungen zur Berechnung von  $\hat{U}$  und  $\varphi_u$

$$(1) \quad \hat{U} \cdot \cos \varphi_u = \hat{U}_R ; \quad (2) \quad \hat{U} \cdot \sin \varphi_u = -\hat{U}_C$$

$$(2) \div (1) \rightarrow \tan \varphi_u = \frac{-\hat{U}_C}{\hat{U}_R}$$

$$\varphi_u = -\arctan \frac{\hat{U}_C}{\hat{U}_R} = -\arctan \frac{\hat{I}}{\hat{I} \cdot R_2} = -\arctan \frac{1}{\omega C R_2} = \underline{\underline{-41^\circ}}$$

$$(1) \quad \hat{U} \cdot \cos \varphi_u = \hat{U}_R ; \quad (2) \quad \hat{U} \cdot \sin \varphi_u = -\hat{U}_C$$

$$\sqrt{(1)^2 + (2)^2} \rightarrow \hat{U}^2 (\sin^2 \varphi_u + \cos^2 \varphi_u) = \hat{U}_R^2 + \hat{U}_C^2 \quad \xrightarrow{\sin^2 \varphi_u + \cos^2 \varphi_u = 1}$$

$$\hat{U} = \sqrt{\hat{U}_R^2 + \hat{U}_C^2} = \underline{\underline{226,6V}}$$

$$u(t) = 226,52V \cdot \sin(\omega t - 41,5^\circ)$$

$$\hat{U} = \sqrt{\hat{I}^2 \cdot R^2 + \hat{I}^2 \cdot \left(\frac{1}{\omega \cdot C}\right)^2} = \hat{I} \cdot \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega \cdot C}\right)^2}$$

Scheinwiderstand Z  
(Impedanz)

$$u(t) = \hat{I} \cdot \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega \cdot C}\right)^2} \cdot \sin\left(\omega \cdot t - \frac{1}{\omega \cdot R \cdot C}\right)$$

$$u = \hat{U} \sin(\omega t + \varphi_u)$$

Der Gleichwert der Leistung kann auf folgendem Weg berechnet werden:

$$\bar{p} = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T p(t) dt = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T u(t) \cdot i(t) dt = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T i(t) \cdot [u_R(t) + u_C(t)] dt$$

$$\bar{p} = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T \hat{I} \sin \omega t \cdot [\hat{U}_R \sin \omega t - \hat{U}_C \cos \omega t] dt$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T [\hat{U}_R \cdot \hat{I} \cdot \sin^2 \omega t - \hat{U}_C \cdot \hat{I} \cdot \sin \omega t \cdot \cos \omega t] dt$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T \left[ \hat{U}_R \cdot \hat{I} \cdot \sin^2 \omega t - \hat{U}_C \cdot \hat{I} \cdot \sin \omega t \cdot \cos \omega t \right] dt$$

mit  $\sin^2 \omega t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\omega t$  und  $\sin \omega t \cdot \cos \omega t = \frac{1}{2} \sin 2\omega t$  folgt:

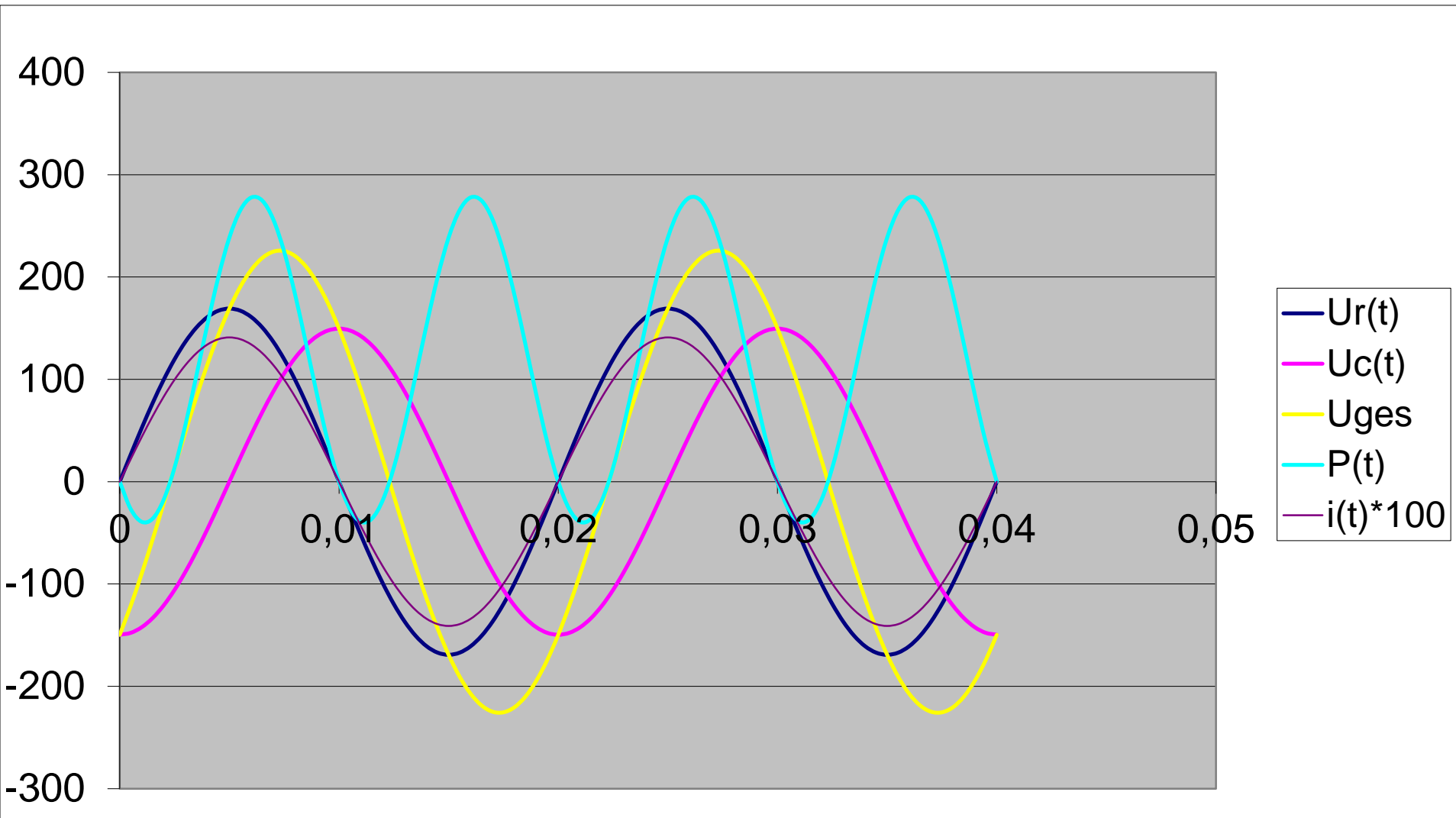
$$\bar{p} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\hat{U}_R \cdot \hat{I}}{2} dt - \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\hat{U}_R \cdot \hat{I}}{2} \cdot \cos 2\omega t \cdot dt - \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\hat{U}_C \cdot \hat{I}}{2} \cdot \sin 2\omega t \cdot dt$$

Integral über Periode ist Null!

$$\frac{\hat{U}_R \cdot \hat{I}}{2} = \frac{\hat{U}_R}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\hat{I}}{\sqrt{2}} = U_R \cdot I$$

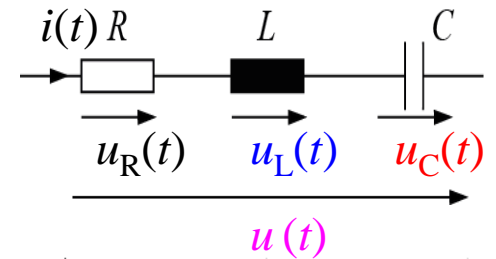
$$\bar{p} = \underline{\underline{120W}} = P \text{ (Wirkleistung)}$$





[Zur Exceltabelle](#)

## Beispiel R-L-C-Reihenschaltung

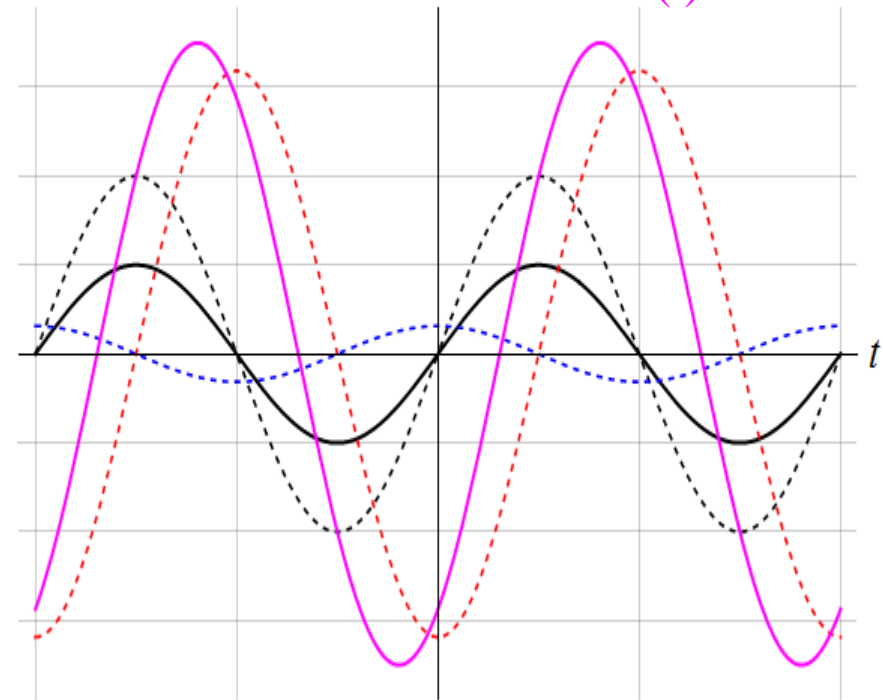


$$i(t) = \hat{I} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_i)$$

$$u(t) = \hat{U} \cdot \sin\left(\omega \cdot t + \varphi_u\right)$$

$$\begin{aligned} u(t) &= u_R(t) + u_L(t) + u_C(t) = \\ &= R \cdot i(t) + L \cdot \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \cdot \int_{-\infty}^t i(\tau) \cdot d\tau \end{aligned}$$

$$\frac{du(t)}{dt} = R \cdot \frac{di(t)}{dt} + L \cdot \frac{d^2i(t)}{dt^2} + \frac{1}{C} \cdot i(t)$$



$$\frac{d^2i(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{L \cdot C} \cdot i(t) = \frac{1}{L} \cdot \frac{du(t)}{dt}$$

$$u(t) = \sqrt{R^2 + \left(\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C}\right)^2} \cdot \hat{I} \cdot \sin\left(\omega \cdot t + \varphi_i + \arctan \frac{\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C}}{R}\right)$$

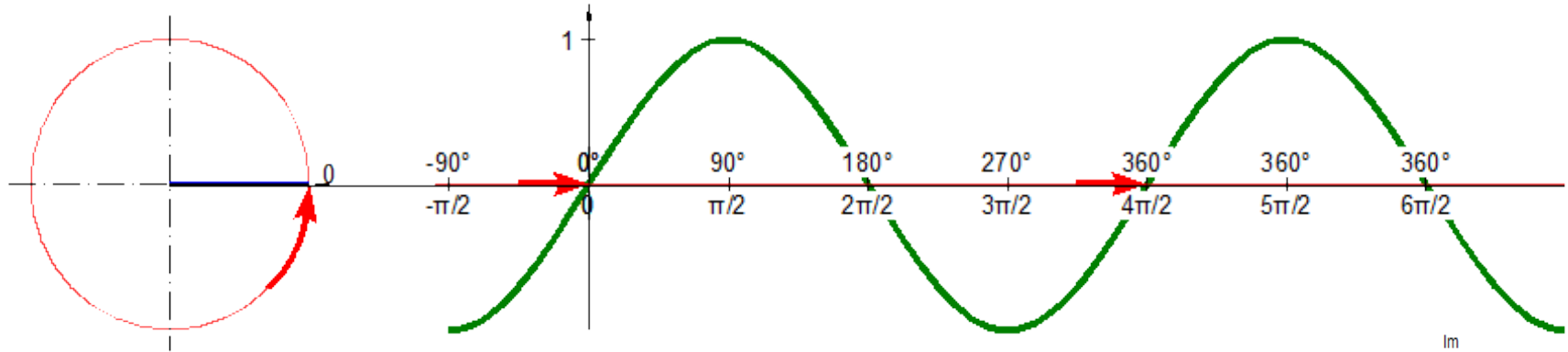
$$\hat{U} = \sqrt{R^2 + \left(\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C}\right)^2} \cdot \hat{I}$$

$$\varphi_u = \varphi_i + \arctan \frac{\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C}}{R}$$

## 7.3 Symbolische Methode:

### 7.3.1 Abbildung in die komplexe Ebene

Zusammenhang Sinusfunktion und rotierender Zeiger:



Analytische Darstellung im Bildbereich  
(im Komplexen): Euler'sche Form

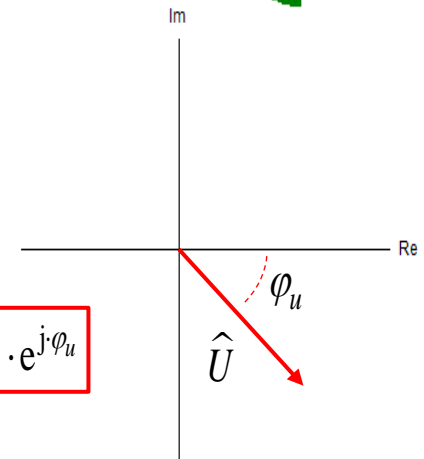
$$\underline{u}(t) = \hat{U} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_u)} = \hat{U} \cdot e^{j\varphi_u} \cdot e^{j\omega t} = \underline{\hat{U}} \cdot e^{j\omega t}$$

$$\hat{U} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_u)} = \hat{U} \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_u) + j \cdot \hat{U} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_u)$$

$$\underline{u}(t) = \text{Im} \{ \underline{u}(t) \}$$

Rotierender Zeiger  
wird zum Zeitpunkt  
 $t=t_0$  angehalten =>  
ruhender Zeiger

$$\underline{\hat{U}} = \hat{U} \cdot e^{j\varphi_u}$$

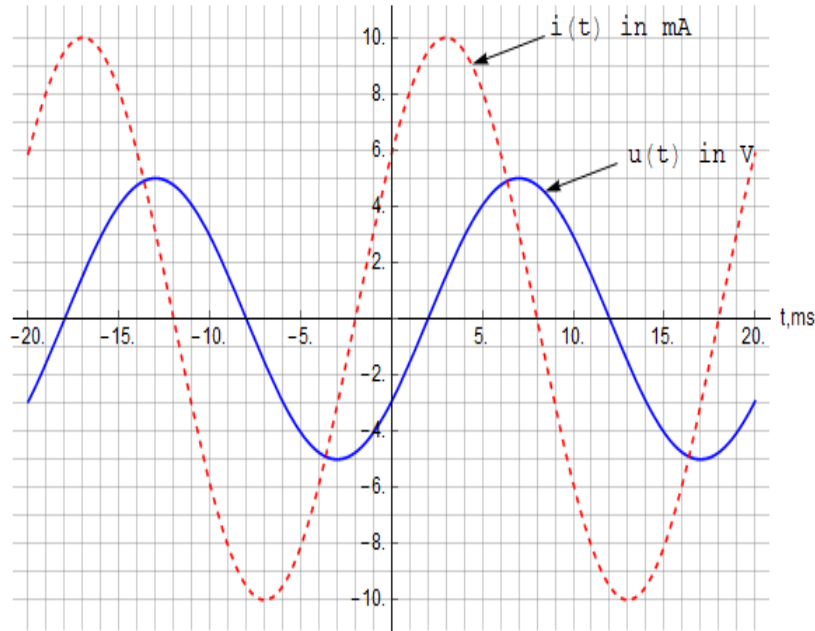


Voraussetzung:

- (1) überall im Netzwerk gleiche Frequenz  $f$
- (2) alle zeitabhängigen Größen sinusförmig

# Beispiel 1

## Im Zeitbereich



$$T = 20\text{ms}, \quad f = \frac{1}{T} = 50\text{Hz}, \quad \omega = 2\pi \cdot f = 314\text{s}^{-1}$$

$$\begin{aligned} \hat{U} &= 5\text{V} & \varphi_u &= -36^\circ & u(t) &= 5\text{V} \cdot \sin(\omega \cdot t - 36^\circ), \\ \hat{I} &= 10\text{mA} & \varphi_i &= +36^\circ & i(t) &= 10\text{mA} \cdot \sin(\omega \cdot t + 36^\circ). \end{aligned}$$

## Im Bildbereich

$$\underline{\hat{U}} = 5\text{V} e^{-j36^\circ} = 4,045\text{V} - j \cdot 2,94\text{V}$$

$$\underline{\hat{I}} = 10\text{mA} e^{j36^\circ} = 8,09\text{mA} + j \cdot 5,88\text{mA}$$

$$\text{Zeiger } 1\text{cm} \triangleq 1\text{V}$$

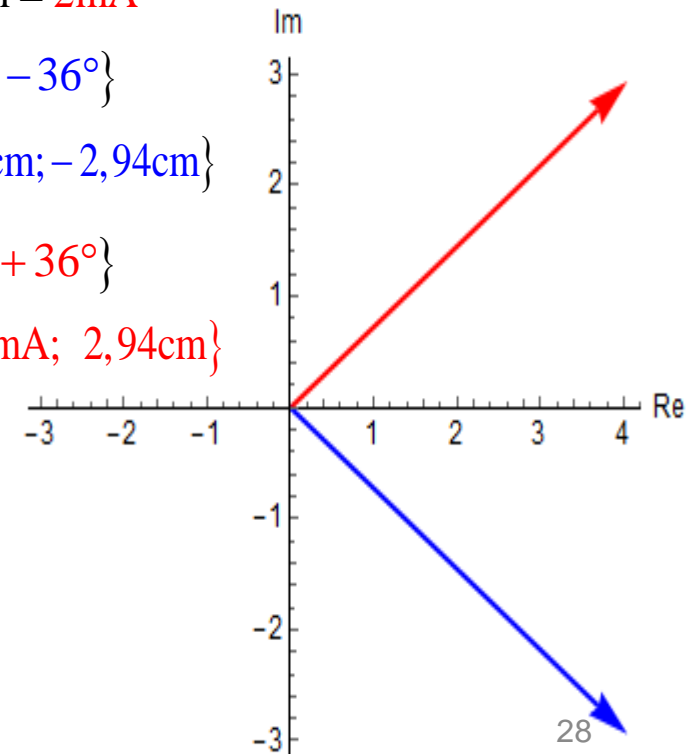
$$1\text{cm} \triangleq 2\text{mA}$$

$$\underline{\hat{U}}_{\text{ZD}} = \{5\text{cm}; -36^\circ\}$$

$$= \{4,045\text{cm}; -2,94\text{cm}\}$$

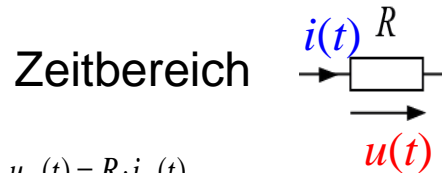
$$\underline{\hat{I}}_{\text{ZD}} = \{5\text{cm}; +36^\circ\}$$

$$= \{4,045\text{mA}; 2,94\text{cm}\}$$



## 7.3.2 Verhalten der Bauelemente im Komplexen:

### a) Widerstand:

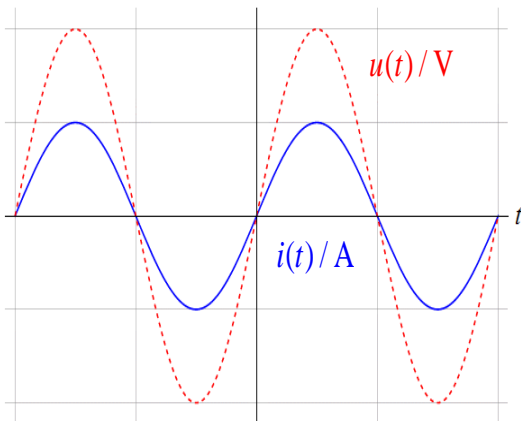


$$u_R(t) = R \cdot i_R(t)$$

$$u_R(t) = \hat{U}_R \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_{uR}) = \\ = R \cdot \hat{I}_R \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_{iR})$$

$$Z_R = \frac{\hat{U}}{\hat{I}} = R$$

$$\varphi_R = \varphi_{uR} - \varphi_{iR} = 0$$



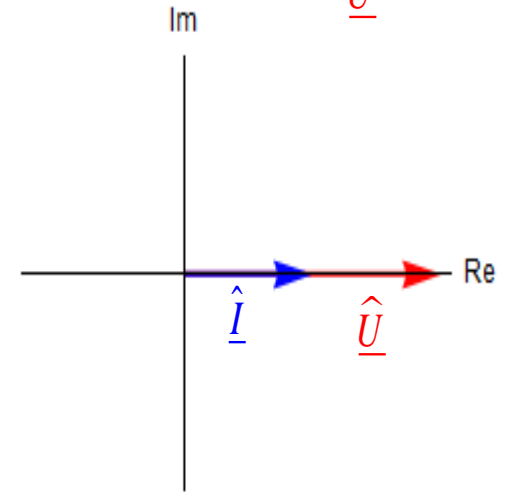
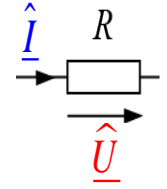
Bildbereich

$$\underline{U}_R = R \cdot \underline{I}_R$$

$$\hat{U} \cdot e^{j\varphi_u} = R \cdot \hat{I} \cdot e^{j\varphi_i}$$

Komplexer Widerstand (Impedanz)

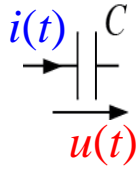
$$\underline{Z} = \frac{\hat{U}}{\hat{I}} = R = R \cdot e^{j0^\circ}$$



Zeigerbild

## b) Kapazität

Zeitbereich

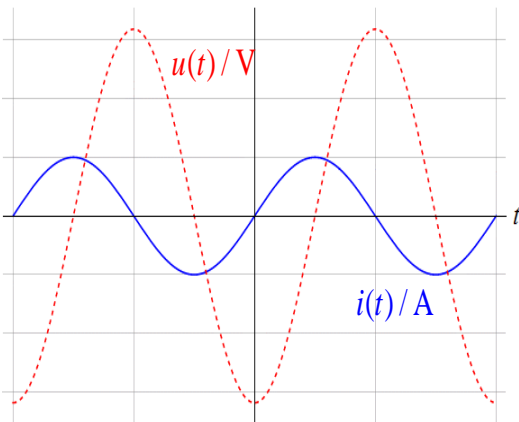


$$i_C(t) = C \cdot \frac{du_C(t)}{dt}$$

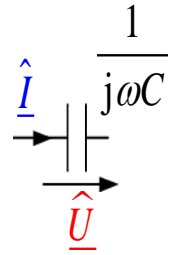
$$u_C(t) = \hat{U}_C \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_{u_C}) = \frac{\hat{I}_C}{\omega \cdot C} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_{i_C} - 90^\circ)$$

$$Z_C = \frac{\hat{U}}{\hat{I}} = \frac{1}{\omega \cdot C}$$

$$\varphi_C = \varphi_{u_C} - \varphi_{i_C} = -90^\circ = -\frac{\pi}{2}$$



Bildbereich



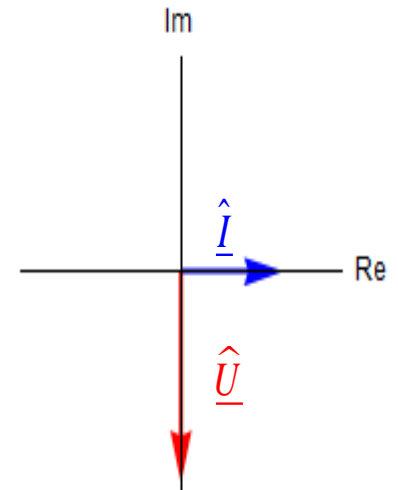
$$\hat{I} = j \cdot \omega \cdot C \cdot \hat{U} \cdot e^{j \cdot \varphi_u}$$

$$\hat{I} \cdot e^{j \cdot \varphi_i} = \omega \cdot C \cdot \hat{U} \cdot e^{j \cdot (\varphi_u + 90^\circ)}$$

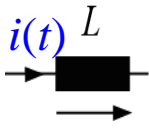
Zeigerbild

Komplexer Widerstand  
(Impedanz)

$$\underline{Z} = \frac{\hat{U}}{\hat{I}} = \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C} = \frac{1}{\omega \cdot C} \cdot e^{-j \cdot 90^\circ}$$



# c) Induktivität

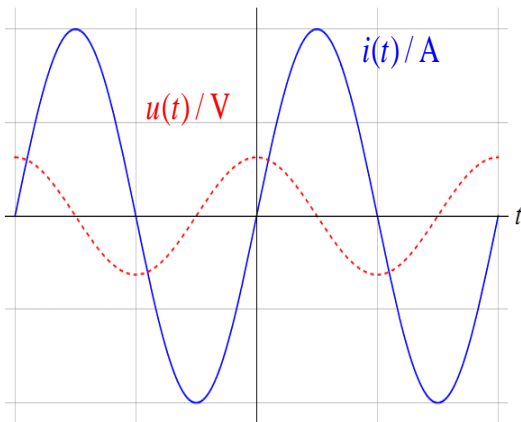
Zeitbereich 

$$u_L(t) = L \cdot \frac{di_L(t)}{dt}$$

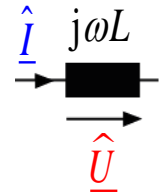
$$u_L(t) = \hat{U}_L \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_{uL}) = \omega \cdot L \cdot \hat{I}_L \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_{iL} + 90^\circ)$$

$$Z_L = \frac{\hat{U}}{\hat{I}} = \omega \cdot L$$

$$\varphi_L = \varphi_{uL} - \varphi_{iL} = +90^\circ = \frac{\pi}{2}$$



Bildbereich



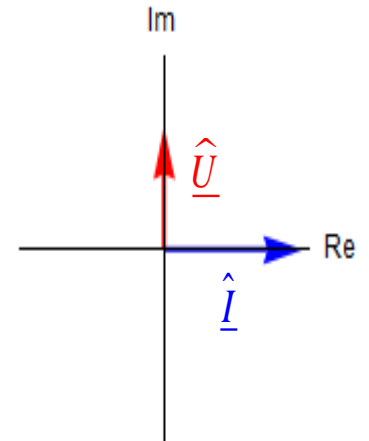
$$\underline{\hat{U}} = j \cdot \omega \cdot L \cdot \hat{I} \cdot e^{j \cdot \varphi_i}$$

$$\hat{U} \cdot e^{j \cdot \varphi_u} = \omega \cdot L \cdot \hat{I} \cdot e^{j \cdot (\varphi_i + 90^\circ)}$$

Zeigerbild

Komplexer Widerstand (Impedanz)

$$\underline{Z} = \frac{\underline{\hat{U}}}{\hat{I}} = j \cdot \omega \cdot L = \omega \cdot L \cdot e^{j \cdot 90^\circ}$$



Zur Erinnerung:

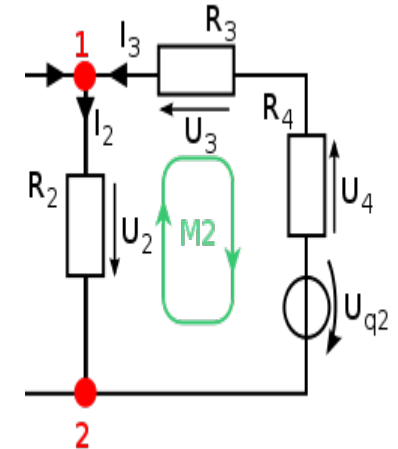
**Knoten:** Punkt im Netzwerk, in dem eine Stromverzweigung auftritt.

Für Simulationen gilt häufig eine andere Definition, hier wird der Knoten als Verbindung zweier Bauelemente dargestellt!  
(siehe Pspice, GST)

**Zweig:** Verbindung zweier Knoten durch Zweipolelemente.

**Masche:** über Zweige geschlossener Umlauf.

**Superposition oder Überlagerungssatz für Netzwerke:**  
Jeder Zweigstrom kann als vorzeichenbehaftete Summe der Teilwirkungen berechnet werden, die jeweils im Zweig von jeder Spannungsquelle im Netz hervorgerufen wird.



Kirchhoff'sche Sätze für die zeitabhängige Signale im Zeitbereich und im Komplexen

Der Knotensatz (1.  
Kirchhoff'scher Satz)

$$\sum_i \text{vzb } i(t)_i = 0$$

$$\sum_i \text{vzb } \hat{I}_i = 0$$

Der Maschensatz (2.  
Kirchhoff'scher Satz)

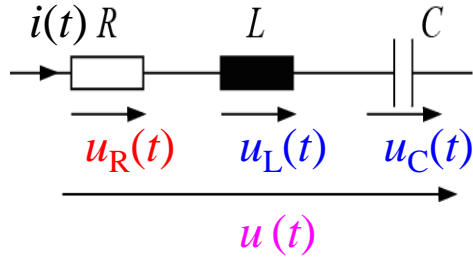
$$\sum_i \text{vzb } u(t)_i = 0$$

$$\sum_i \text{vzb } \hat{U}_i = 0$$



# Symbolische Methode

Zeitbereich

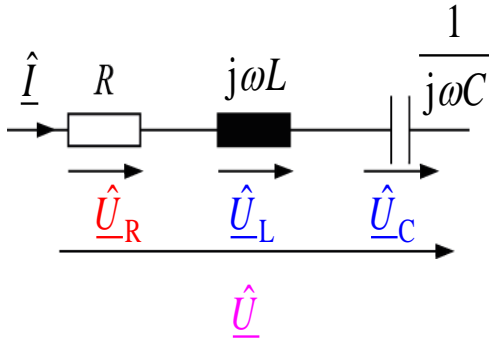


$$u(t) = u_R(t) + u_L(t) + u_C(t) = R \cdot \hat{I} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_i) + \omega \cdot L \cdot \hat{I} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_i + 90^\circ) + \frac{1}{\omega \cdot C} \cdot \hat{I} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_i - 90^\circ) \quad = ?$$

$$u(t) = \sqrt{R^2 + \left(\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C}\right)^2} \cdot \hat{I} \cdot \sin\left(\omega \cdot t + \varphi_i + \arctan \frac{\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C}}{R}\right)$$

$$\hat{U} = \sqrt{R^2 + \left(\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C}\right)^2} \cdot \hat{I}, \quad \varphi_u = \varphi_i + \arctan \frac{\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C}}{R} \quad Z = \frac{\hat{U}}{\hat{I}} = \sqrt{R^2 + \left(\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C}\right)^2}$$

Bildbereich



$$\hat{U} = \hat{U}_R + \hat{U}_L + \hat{U}_C$$

$$\hat{U} \cdot e^{j\varphi_u} = R \cdot \hat{I} \cdot e^{j\varphi_i} + j \cdot \omega \cdot L \cdot \hat{I} \cdot e^{j\varphi_i} + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C} \cdot \hat{I} \cdot e^{j\varphi_i}$$

$$\hat{U} \cdot e^{j\varphi_u} = \left( R + j \cdot \omega \cdot L + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C} \right) \cdot \hat{I} \cdot e^{j\varphi_i}$$

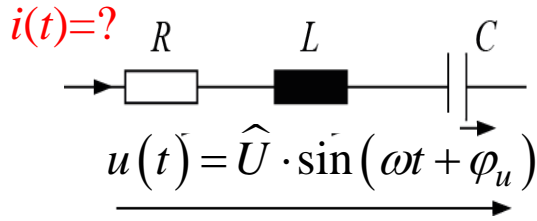
Komplexer Widerstand (Impedanz)

Wirkwiderstand

$$\underline{Z} = \frac{\hat{U}}{\hat{I}} = R + j \cdot \omega \cdot L + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C} = R + j \cdot \omega \cdot L - j \cdot \frac{1}{\omega \cdot C} = R + j \cdot \left( \omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C} \right) = \sqrt{R^2 + \left( \omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C} \right)^2} \cdot e^{\arctan \frac{\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C}}{R}}$$

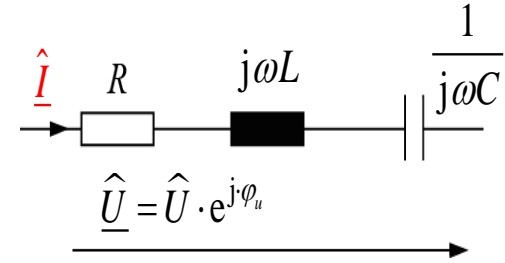
Blindwiderstand

# Symbolische Methode



Lösung

1. Transformation ins Komplexe



2. Ermittlung der Lösung im Komplexen

$$\underline{\hat{I}} = \frac{\underline{\hat{U}}}{\underline{Z}} = \frac{\hat{U} \cdot e^{j\varphi_u}}{Z \cdot e^{j\varphi_Z}} = \frac{\hat{U}}{Z} \cdot e^{j(\varphi_u - \varphi_Z)} \quad \underline{Z} = R + j \cdot \omega \cdot L + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C}$$

$$= \sqrt{R^2 + \left(\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C}\right)^2} \cdot e^{j \arctan \frac{\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C}}{R}}$$

Berechnung der Exponentialform der Lösung im Komplexen

$$\underline{\hat{I}} = \frac{\hat{U}}{\underline{Z}} = \frac{\hat{U}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C}\right)^2}} \cdot e^{j \left( \varphi_u - \arctan \frac{\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C}}{R} \right)}$$

3. Rücktransformation in den Zeitbereich

$$i(t) = \frac{\hat{U}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C}\right)^2}} \cdot \sin \left( \omega t + \varphi_u - \arctan \frac{\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C}}{R} \right)$$